Approximation durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen

Braß, Helmut

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 21, 1969,
S.429-479

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Approximation durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen

Von **Helmut Braß**

Vorgelegt von **W. Quade**

(Eingegangen am 27. 7. 1968)

Übersicht: $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ sei ein System von Elementen eines normierten Raumes B. Durch

$$E_n^{\mathscr{G}}[f] = \inf_{\alpha_\nu} \| f - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu \| \qquad \alpha_\nu \text{ reell}$$

wird jedem $f \in B$ eine Zahlenfolge $E_n^{\mathscr{G}}[f]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zugeordnet. Das Studium dieser Zahlenfolgen ist eine Hauptaufgabe der Approximationstheorie. In dieser Arbeit wird der Spezialfall behandelt, bei dem $\mathscr{G}$ das System der Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Eigenwertaufgabe ist und als Norm die sup-Norm verwendet wird.

Es werden zwei Methoden entwickelt, die eine Zurückführung der $E_n^{\mathscr{G}}[f]$ auf $E_n^{\mathscr{H}}[f]$ gestatten, wo $\mathscr{H}$ ein durch $\mathscr{G}$ bestimmtes einfacheres System von Eigenfunktionen ist.

Die $E_n^{\mathscr{H}}[f]$ sind häufig leicht zu ermitteln, so z. B. in den beiden folgenden Fällen

(i) Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung, allgemeine Randbedingungen,

(ii) Eigenwertaufgaben beliebiger Ordnung, periodische Randbedingungen.

Es zeigt sich, daß die Hauptsätze der trigonometrischen Approximation sich auf beide Fälle verallgemeinern lassen.

Summary: Let $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ be a system of elements of a normed space B. By

$$E_n^{\mathscr{G}}[f] = \inf_{\alpha_\nu} \| f - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu g_\nu \| \qquad \alpha_\nu \text{ real}$$

to each $f \in B$ is assigned a sequence of numbers $E_n^{\mathscr{G}}[f]$, $(n = 1, 2, \ldots)$. The investigation of these sequences is a main problem in the theory of approximation. In this paper the special case is considered when $\mathscr{G}$ is the system of eigenfunctions of a self-adjoined eigenvalue problem and the norm is the sup-norm.

Two methods are presented for the reduction of $E_n^{\mathscr{G}}[f]$ to $E_n^{\mathscr{H}}[f]$ where $\mathscr{H}$ is a simpler system of eigenfunctions determined by $\mathscr{G}$. Frequently the $E_n^{\mathscr{H}}[f]$ are easy to be found, e. g. in the two following cases

(i) eigenvalue problems of second order, general boundary conditions,

(ii) eigenvalue problems of arbitrary order, periodic boundary conditions.

It is shown that the main theorems of the theory of trigonometric approximation can be generalized in these two cases.

§ 1. Einleitung

Es bezeichne B einen normierten Raum, $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ eine Folge von Elementen aus B und $\mathscr{G}_\nu$ die lineare Hülle der Menge $\{g_1, g_2, \ldots, g_\nu\}$. Wir definieren

$$E_\nu^{\mathscr{G}}[f] = \inf_{g \in \mathscr{G}_\nu} \| f - g \| \qquad f \in B .$$

Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Zahlenfolge $E_\nu^{\mathscr{G}}[f]$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) ist eine Hauptaufgabe der Approximationstheorie.

Diese Arbeit will zu derartigen Untersuchungen beitragen. Es muß vorweg betont werden, daß man von einer Lösung des Problems in aller Allgemeinheit heute noch weit entfernt ist; es erscheint sogar zweifelhaft, ob eine solche Lösung überhaupt möglich ist. Schon die viel einfachere Frage, für welche f bei festgehaltenem B und $\mathscr{G}$

$$\lim_{\nu \to \infty} E_\nu^{\mathscr{G}}[f] = 0$$

gilt, gibt nach dem Urteil von *M. H. Stone* ([1] p. 85) Anlaß zu „some of the most difficult problems of analysis".

Was man bis heute erreicht hat, sind Aussagen über $E_\nu^{\mathscr{G}}[f]$ bei gewissen, sehr speziellen Wahlen von B und $\mathscr{G}$. Genauer untersucht sind im Grunde nur drei Fälle, die man kurz kennzeichnen kann als Approximation durch Polynome, durch trigonometrische Ausdrücke und durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen.

Es liegt nahe, von diesen Fällen zu „benachbarten" Fällen überzugehen, denn folgendes ist ja ganz plausibel:

Liegen $\mathscr{G}$ und $\mathscr{H} = \{h_1, h_2, \ldots\}$ ($h_\nu \in B$) in einem noch zu präzisierenden Sinne nahe beieinander, so liegen auch $E_\nu^{\mathscr{G}}[f]$ und $E_\nu^{\mathscr{H}}[f]$ nahe beieinander. Kennt man $E_\nu^{\mathscr{G}}[f]$, dann kennt man — wenigstens näherungsweise — auch $E_\nu^{\mathscr{G}}[f]$. Wir werden zeigen, daß sich auf dem angedeuteten Wege tatsächlich nichttriviale Aussagen über die $E_\nu^{\mathscr{H}}[f]$ für mancherlei Systeme $\mathscr{H}$ gewinnen lassen. Der interessanteste Fall wird der sein, bei dem $\mathscr{H}$ das System der Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Eigenwertaufgabe $2n$-ter Ordnung ist. Um dies Programm durchführen zu können, müssen wir die bekannten Ergebnisse über die $E_\nu^{\mathscr{G}}[f]$ durchmustern.

Dazu erinnern wir zunächst an zwei allgemein übliche Bezeichnungen: Der Raum der auf dem Segment $[a, b]$ definierten stetigen reellwertigen Funktionen, versehen mit der Norm

$$\| f \| = \sup_{x \in [a, b]} | f(x) |$$

heißt $C[a, b]$. Die durch

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|x - y| \leq \delta} | f(x) - f(y) | \qquad f \in C[a, b]$$

definierte Funktion von δ heißt Stetigkeitsmodul von f.

Es sei nun B ein Unterraum von $C[a, b]$. Wir nennen $\mathcal{G}$ vom *Jackson*schen Typ, wenn

$$E_\nu^{\mathcal{G}}[f] \leq \text{const}\,(\omega(f; \nu^{-1}) + \nu^{-1}\,||f||) \qquad f \in B \tag{1,1}$$

mit einer von f und ν unabhängigen Konstanten gilt.

Diese Bezeichnung rührt von folgendem *Jackson*schen Ergebnis her (siehe z. B. [2]): Ist $B = C[a, b]$ und $\mathcal{G}$ definiert durch

$$g_\nu = g_\nu(x) = x^{\nu-1} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

so gilt

$$E_\nu^{\mathcal{G}}[f] \leq \text{const}\,\omega(f; \nu^{-1}) \tag{1,2}$$

Der gegenüber (1,2) zusätzliche Term $\nu^{-1}\,||f||$ in der Definition (1,1) ist nahegelegt durch verschiedene Spezialfälle. Ließe man ihn weg, dann wären in allen Räumen B, die konstante Funktionen enthalten, nur solche Systeme $\mathcal{G}$ vom *Jackson*schen Typ, für die $g_1 = g_1(x) = \text{const}$ gilt — eine willkürlich erscheinende Einschränkung.

Jackson hat weiter bewiesen [2]: Ist B der Unterraum C^* von $C[-\pi, \pi]$, der aus den Funktionen f mit $f(-\pi) = f(\pi)$ besteht, und ist $\mathcal{G}$ definiert durch

$$g_{2\nu-1}(x) = \cos(\nu - 1)\,x\,,\ g_{2\nu}(x) = \sin \nu x;\ \nu = 1, 2, \ldots \tag{1,3}$$

so gilt ebenfalls (1,2).

Im schon erwähnten Fall der Approximation durch Eigenfunktionen hat *Jackson* [3] folgendes bewiesen:

B sei der Unterraum von $C[0, \pi]$, der aus den Funktionen f mit $f(0) = f(\pi) = 0$ besteht. $\mathcal{G}$ sei das System der nach wachsenden Eigenwerten geordneten Eigenfunktionen einer *Sturm-Liouville*schen Eigenwertaufgabe. Diese besteht aus der Differentialgleichung

$$g_\nu''(x) + (\lambda_\nu - l(x))\,g_\nu(x) = 0 \qquad l(x) \in C[0, \pi] \tag{1,4}$$

und den Randbedingungen

$$g_\nu'(0) - h\,g_\nu(0) = 0 \quad g_\nu'(\pi) + H\,g_\nu(\pi) = 0 \tag{1,5}$$

dabei bedeuten h und H feste reelle Zahlen oder ∞, die Interpretation von (1,5) im letzten Fall ist klar.

Gilt nun

$$\omega(f; \delta) \leq \text{const}\,\delta$$

dann ist $E_\nu^{\mathcal{G}}[f] \leq \text{const}\,\nu^{-1}$.

Das ist weniger als (1,1), doch ließe sich (1,1) daraus mit elementaren Hilfsmitteln herleiten.

Jacksons Beweis stützt sich auf die Tatsache, daß die betrachteten Eigenfunktionen sich durch trigonometrische Funktionen annähern lassen und für die letzteren die $E_\nu^{\mathcal{G}}[f]$ bekannt sind. Für viel allgemeinere Klassen von Eigenfunktionen konnte *Milne* [4] mit Hilfe von ganz anderen Methoden die $E_\nu^{\mathcal{G}}[f]$ abschätzen. Jedoch sind seine Ergebnisse schwächer als (1,1). 1957 hat *Natanson* [5] in einer kurzen Note eine Reihe von Resultaten über die Approximation durch *Sturm-Liouville*-Funktionen (mit $h \neq \infty$) angegeben, die *Jacksons* Ergebnisse in wesentlichen Punkten ergänzen und verbessern. Leider hat er — soweit ich sehe — seine Beweise bisher nicht veröffentlicht. Bei der Frage, die uns zunächst interessiert, geht er über *Jackson* insofern hinaus, als er (1,1) ausspricht und die Gültigkeit für alle $f \in C[0, \pi]$ behauptet (Implizit steht das allerdings auch schon bei *Jackson*). Weiter muß noch eine Arbeit von *Scarpellini* [6] genannt werden. *Scarpellini* benutzt eine etwas andere Form der Differentialgleichung (1,4) und legt die speziellen Randbedingungen $g_\nu(0) = g_\nu(\pi) = 0$ zugrunde. Seine Beweismethode ist interessant und führt zu eleganten Resultaten, die aber mit denen von *Jackson* nicht ohne weiteres verglichen werden können.

Die Randbedingungen (1,5) sind etwas willkürlich gewählt und durch historische Zufälligkeiten bedingt. Natürlicher wäre es, die Differentialgleichung (1,4) mit allgemeinen selbstadjungierten Randbedingungen zu betrachten. Man hätte dann insbesondere den Vorteil, daß die trigonometrische Approximation als Spezialfall der Approximation durch Eigenfunktionen erschiene. ($l(x) = 0$, Randbedingungen $g(0) = g(\pi)$, $g'(0) = g'(\pi)$.)

Wir werden in § 6 zeigen, daß das System dieser allgemeineren Eigenfunktionen vom *Jackson*schen Typ ist (in einem „natürlichen" B) — daraus folgt dann *Natansons* Ergebnis.

Dieser Satz wird sich ergeben als Spezialfall des Hauptresultates des ersten Teiles der Arbeit, welches besagt, daß die Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Eigenwertaufgabe beliebiger Ordnung vom *Jackson*schen Typ sind, wenn es die Eigenfunktionen einer zugehörigen „reduzierten" Aufgabe sind. Die letzten sind stets elementare Funktionen, und ihre $E_\nu^{\mathcal{G}}[f]$ lassen sich häufig gut übersehen, so etwa bei allen Aufgaben zweiter Ordnung, und auch bei vielen Aufgaben höherer Ordnung. Es bleiben aber noch unendlich viele Fälle, bei denen die $E_\nu^{\mathcal{G}}[f]$ der reduzierten Aufgabe nicht so leicht bestimmt werden können; auf diese will ich in einer späteren Arbeit zurückkommen.

Es ist noch zu bemerken, daß der Reduktionssatz nur unter zwei hier nicht genannten Zusatzvoraussetzungen bewiesen werden konnte, von denen ich vermute, daß sie stets erfüllt sind; ich habe aber Beweise dafür in der Literatur nicht finden können. Ein Beweis dafür, daß sie jedenfalls in den wichtigsten Fällen erfüllt sind, ist in § 5 angedeutet, dort findet man auch eine Methode, die die Nachprüfung der Zusatzvoraussetzungen in jedem Einzelfall zu einer ganz elementaren Aufgabe macht. Die Frage ist aber im übrigen nicht weiter diskutiert, weil es sich nicht eigentlich um Probleme der Approximationstheorie handelt.

Der Reduktionssatz ist seinerseits (nichttrivialer) Spezialfall von Satz 2 aus § 3, der etwa folgendes aussagt: Liegen die Systeme $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ in einem dort präzisierten Sinne nahe beieinander und erfüllt $\mathcal{G}$ eine gewisse Voraussetzung, so gilt: Ist $\mathscr{G}$ vom *Jackson*schen Typ, so auch $\mathscr{H}$. Natürlich lassen sich von diesem Satz auch Anwendungen machen, die nichts mit Eigenfunktionen zu tun haben, eine solche Anwendung steht in § 4. Dort ist u. a. gezeigt, daß das System $\{\cos \lambda_\nu x \mid \nu = 1, 2, \ldots\}$ vom *Jackson*schen Typ ist, wenn $|\lambda_\nu - \nu + 1|$ genügend klein ist. Die Betrachtung dieses Funktionensystems liegt nahe, weil es schon verschiedentlich unter verwandten Gesichtspunkten untersucht wurde (siehe etwa [7]).

Der Beweis von Satz 2 ist nicht schwierig, damit wird auch der Beweis des *Jackson*schen Satzes über Approximation durch Eigenfunktionen ziemlich kurz und durchsichtig. Diese Einfachheit erlaubt es gerade, die Methode auch noch auf eine Reihe von verwandten Problemen anzuwenden, so auf gewisse Fälle nichtselbstadjungierter Randbedingungen, „Randbedingungen", die sich auf mehr als zwei Punkte beziehen, und anderes. Diese Dinge sind wohl von geringerem Interesse, auch sind noch manche zusätzlichen Überlegungen nötig, auf deren Darstellung verzichtet werden möge, jedoch sollte wenigstens auf diese Erweiterungsmöglichkeit hingewiesen werden.

Die bisher besprochene „erste Abschätzungsmethode" ist einfach und direkt, führt aber im allgemeinen nur zu verhältnismäßig groben Resultaten. Gelegentlich kann man mit dieser Methode aber doch zu viel schärferen Resultaten vordringen, ein Beispiel dafür ist in § 7 auseinandergesetzt.

Im zweiten Teil der Arbeit (§ 8 – § 10) wird eine „zweite Abschätzungsmethode" benutzt. Sie liegt tiefer (insbesondere wegen der Heranziehung des *Stone*schen Äquikonvergenzsatzes) und ist speziell zugeschnitten auf die Anwendung auf Eigenfunktionen, jedoch liefert sie auch erheblich mehr. Um ihre Ergebnisse richtig zu verstehen, müssen wir noch den vollständigen Satz von *Jackson* über trigonometrische Approximation [2] zitieren. Dazu definieren wir $C^r[a, b]$ als die Menge der auf $[a, b]$ definierten, reellwertigen Funktionen, die dort eine stetige r-te Ableitung haben.

Satz (*Jackson* 1911): Es sei r eine natürliche Zahl, $B = C^* \cap C^r[-\pi, \pi]$ und $\mathscr{G}$ durch (1,3) definiert. Dann gilt

$$E_\nu^{\mathscr{G}}[f] \leq \text{const} \frac{\omega(f^{(r)}; \nu^{-1})}{\nu^r}.$$

Der Spezialfall $r = 0$, der schon diskutiert wurde, verdient besonderes Interesse.

Jackson [3] ist 1914 eine partielle Übertragung dieses Satzes auf die Approximation durch Linearkombinationen von *Sturm-Liouville*-Funktionen gelungen, sein Ergebnis ist dann von *Natanson* [5] in einem wesentlichen Punkt verbessert worden. Wir werden in § 9 einen Satz beweisen, der sowohl *Natansons* Behauptung als auch *Jacksons* Satz über trigonometrische Approximation als Spezialfälle enthält. Er bezieht sich auf die Approximation durch Eigenfunktionen von (1,4) bei beliebigen selbstadjungierten Randbedingungen. Sein Beweisprinzip ist wieder das der Reduktion auf bekannte Fälle; es läßt sich auch auf Probleme höherer Ordnung anwenden, ein besonders interessanter Fall ist in § 10 dargestellt.

§ 11 enthält „Umkehrsätze", das sind Sätze, die aus dem asymptotischen Verhalten der $E_\nu[f]$ auf die Differentialstruktur von f zu schließen gestatten. Sie zeigen, daß die in § 9 erhaltenen Abschätzungen im wesentlichen nicht verbessert werden können. Im Spezialfall der *Sturm-Liouville*-Aufgaben stehen die Ergebnisse schon bei *Natanson* [5], im Spezialfall der trigonometrischen Approximation sind sie klassisch [2].

Der § 12 enthält einige Anwendungen der hergeleiteten Sätze auf die Theorie der Entwicklungen nach Eigenfunktionen.

§ 2. Einige später benötigte Definitionen und Sätze

Wir legen hier stets einen reellen, unendlichdimensionalen, normierten Raum B zugrunde; f, g, h sind Elemente von B, α, β reelle Zahlen, $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ sei eine Folge von Elementen aus B.

Zunächst notieren wir die folgenden einfachen Beziehungen für die $E_\nu^{\mathcal{G}}[f]$:

$$E_\nu^{\mathcal{G}}[\alpha f] = |\alpha|\, E_\nu^{\mathcal{G}}[f] \tag{2,1}$$

$$E_\nu^{\mathcal{G}}[f+g] \leq E_\nu^{\mathcal{G}}[f] + E_\nu^{\mathcal{G}}[g] \text{ und } E_\nu^{\mathcal{G}}[f+g] \geq E_\nu^{\mathcal{G}}[f] - E_\nu^{\mathcal{G}}[g] \tag{2,2}$$

$$E_\nu^{\mathcal{G}}[f] \leq \|f\| \tag{2,3}$$

$$E_\nu^{\mathcal{G}}[f+h] = E_\nu^{\mathcal{G}}[f], \text{ wenn } h \in \mathcal{G}_\nu \tag{2,4}$$

Mit $\mathrm{ba}_\nu^{\mathcal{G}}[f]$ bezeichnen wir ein Element $h \in \mathcal{G}_\nu$, für das $E_\nu^{\mathcal{G}}[f] = \|f - h\|$ gilt.

Weiter werden die folgenden Begriffe und Sätze der Funktionalanalysis eine Rolle spielen.

Def.: $\mathcal{G}$ heißt eine Grundmenge für B, wenn die lineare Hülle von $\mathcal{G}$ in B dicht liegt.

Def.: Eine Grundmenge $\mathcal{G}$ für B heißt minimal, wenn es keine echte Untermenge von $\mathcal{G}$ gibt, die ebenfalls Grundmenge für B ist.

Satz [8]: Eine Grundmenge $\mathcal{G}$ für B ist dann und nur dann minimal, wenn es ein System $\mathcal{G}^* = \{g_1^*, g_2^*, \ldots\}$ von linearen Funktionalen gibt mit

$$g_\nu^*(g_\mu) = \delta_{\nu\mu} \quad (\textit{Kronecker} - \delta)$$

Def.: Ein Paar $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$, wie es im Satz vorkommt, heißt eine biorthogonale Grundmenge.

Wir setzen

$$\vartheta_i = \inf_{\alpha_\nu, N} \| g_i - \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{N} \alpha_\nu g_\nu \| \tag{2,5}$$

Offenbar ist $\vartheta_i > 0$ charakteristisch für die Minimalität.

Satz [8]: Es ist

$$\| g_i^* \| = \vartheta_i^{-1} \tag{2,6}$$

Def.: Ist $\inf \vartheta_i = \vartheta > 0$, so heißt $\mathcal{G}$ streng minimal.

Satz: Ist $\mathcal{G}$ streng minimal, dann gilt

$$| g_\nu^* (f) | \leq \vartheta^{-1} E_{\nu-1}^{\mathcal{G}} [f] \quad \nu = 2, 3, \ldots \tag{2,7}$$

Beweis:

$$| g_\nu^* (f) | = | g_\nu^* (f - \mathrm{ba}_{\nu-1}^{\mathcal{G}} [f]) | \leq || g_\nu^* || E_{\nu-1}^{\mathcal{G}} [f] \leq \vartheta^{-1} E_{\nu-1}^{\mathcal{G}} [f]$$

Def.: Eine biorthogonale Grundmenge heißt vom *Bessel*schen Typ, wenn es ein $C > 0$ gibt derart, daß für jedes $f \in B$

$$[\sum_{\nu=1}^{\infty} [g_\nu^* (f)]^2]^{\frac{1}{2}} < C \, || f || \tag{2,8}$$

gilt.

Setzt man in (2,8) $f = g_\mu - \sum_{\nu \neq \mu} \alpha_\nu g_\nu$, dann folgt sogleich

Satz: Eine Grundmenge vom *Bessel*schen Typ ist streng minimal.

Auf Grund dieses Satzes lassen sich nun leicht viele streng minimale Grundmengen angeben. Natürlich bilden Orthonormalsysteme in L^2 *Bessel*sche Systeme, (2,8) ist ja gerade die *Bessel*sche Ungleichung. Wichtiger ist aber für uns, daß Orthonormalsysteme von stetigen Funktionen Anlaß zu *Bessel*schen Systemen im Raum C geben, denn die Funktionale im Raum L^2 sind auch Funktionale im Raum C und es gilt

$$|| f ||_{L_2} \leq \text{const} \, || f ||_C \, .$$

Der Raum L^p $(p > 2)$ läßt sich in ähnlicher Weise behandeln. Es werde betont, daß der Begriff des *Bessel*schen Systems wesentlich allgemeiner ist als der des Orthonormalsystems (vgl. [9] p. 194—195, [10]).

Setzt man in (2,8) $f = g - \mathrm{ba}_\nu^{\mathcal{G}} [g]$, dann erhält man den wichtigen

Satz: Für ein *Bessel*sches System gilt

$$[\sum_{\nu > N} [g_\nu^* (g)]^2]^{\frac{1}{2}} \leq C \, E_N^{\mathcal{G}} [g] \, . \tag{2,9}$$

Es folgen nun noch einige Tatsachen über Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wegen aller Einzelheiten vergleiche man die Darstellungen bei *Kamke* [11] und *Neumark* [12].

Wir betrachten selbstadjungierte Eigenwertaufgaben von der Form

$$L [y] = \lambda \, y \quad U_\nu [y] = 0 \quad \nu = 1, 2, \ldots 2 \, n \, . \tag{2,10}$$

Dabei bedeuten λ eine reelle Zahl und L den folgenden auf [0,1] definierten Differentialoperator:

$$L [y] = y^{(2n)} (x) + \sum_{\nu = 0}^{n-1} (-1)^\nu (l_\nu (x) \, y^{(\nu)} (x))^{(\nu)} \qquad l_\nu \in C^\nu [0,1]$$

Die U_ν sind linear unabhängige Randbedingungen der Form

$$U_\nu = U_{\nu 0} + U_{\nu 1}$$

$$U_{\nu 0}[y] = \alpha_\nu\, y^{(h_\nu)}(0) + \sum_{\varkappa=0}^{h_\nu - 1} \alpha_{\nu\varkappa}\, y^{(\varkappa)}(0) \qquad |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0 \tag{2,11}$$

$$U_{\nu 1}[y] = \beta_\nu\, y^{(h_\nu)}(1) + \sum_{\varkappa=0}^{h_\nu - 1} \beta_{\nu\varkappa}\, y^{(\varkappa)}(1)$$

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq h_{2n} \leq 2n - 1 \quad h_{\nu+2} > h_\nu$$

Auf diese Form lassen sich die allgemeinsten linearen Randbedingungen zurückführen ([12] p. 48—49), man nennt sie die normierte Form. Damit die Aufgabe selbstadjungiert ist, müssen die α und β in (2,11) noch einschränkenden Zusatzvoraussetzungen genügen.

Def.: Die Eigenwertaufgabe

$$y^{(2n)}(x) = \varrho\, y(x) \quad \alpha_\nu\, y^{(h_\nu)}(0) + \beta_\nu\, y^{(h_\nu)}(1) = 0 \quad \nu = 1, 2, \ldots 2n$$

heißt die zu (2,10), (2,11) gehörende reduzierte Aufgabe.

Wir führen noch die Abkürzung

$$\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = (f, g)$$

ein und können damit als Bedingung der Selbstadjungiertheit formulieren: Wenn f und g aus $C^{2n}[0,1]$ sind und allen Randbedingungen genügen, dann ist

$$(f, L(g)) = (L(f), g)\,. \tag{2,12}$$

Es gilt nun der klassische Existenzsatz: Das selbstadjungierte Eigenwertproblem (2,10) hat abzählbar viele Eigenwerte λ mit

$$\lim_{\nu \to \infty} |\lambda_\nu| = \infty \tag{2,13}$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen $y_\nu(x)$ bilden ein Orthogonalsystem. Jedes $f \in C^{2n}[0,1]$, das den Randbedingungen genügt, läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den $y_\nu(x)$ entwickeln.

Viel weiter reicht der folgende **Entwicklungssatz** von *Stone* [13]: Die Entwicklungen nach Eigenfunktionen von (2,10) und nach Eigenfunktionen der zugehörigen reduzierten Aufgabe sind äquikonvergent.

Wir brauchen über die λ_ν noch schärfere Aussagen als (2,13). Sehr weitgehende Resultate in dieser Hinsicht rühren von *Birkhoff* und *Tamarkine* her.

Leider benötigen sie noch eine zusätzliche Voraussetzung über die Randbedingungen, diese müssen „regulär" sein.

(Definition in [11] p. 197). Regulär sind insbesondere

a) Periodische Randbedingungen, d. h. $U_\nu[y] \equiv y^{(\nu-1)}(0) - y^{(\nu-1)}(1)$

b) Antiperiodische Randbedingungen, d. h. $U_\nu[y] \equiv y^{(\nu-1)}(0) + y^{(\nu-1)}(1)$

c) Selbstadjungierte Randbedingungen bei Aufgaben zweiter Ordnung

d) *Sturm*sche Randbedingungen, d. h. solche mit

$$U_{\nu 1} \equiv 0 \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

$$U_{\nu 0} \equiv 0 \quad \nu = n + 1, \ldots 2n$$

Es ist meines Wissens nicht bekannt, ob es überhaupt selbstadjungierte Randbedingungen gibt, die nicht regulär sind.

Unter der Voraussetzung der Selbstadjungiertheit und der Regularität gilt nach *Birkhoff — Tamarkine*:

Ordnet man die Eigenwerte λ_ν nach wachsenden Beträgen, mehrfache mehrfach aufgeführt, so ist

$$\lambda_\nu = (-1)^n (\nu\pi)^{2n} (1 + O(\nu^{-1})) . \tag{2,14}$$

§ 3. Die erste Abschätzungsmethode

Allen Überlegungen dieses Abschnittes liege ein unendlichdimensionaler normierter Raum B zugrunde. $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ sei eine streng minimale Grundmenge für B, g_ν^* und ϑ mögen dieselbe Bedeutung haben wie im vorigen Abschnitt. $\mathscr{H} = \{h_1, h_2, \ldots\}$ sei ein beliebiges System von Elementen aus B. Der Kern der ersten Abschätzungsmethode ist

Satz 1: Für jedes $f \in B$ und für alle $M, N \geq 1$ gilt:

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq E_M^{\mathscr{G}}[f]\,[1 + \vartheta^{-1} \sum_{\nu=1}^{M} E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu]] + \sum_{\nu=1}^{M} |\, g_\nu^*(f) \,|\, E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] . \tag{3,1}$$

Beweis:

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq E_N^{\mathscr{H}}[f - \mathrm{ba}_M^{\mathscr{G}}[f]] + E_N^{\mathscr{H}}[\mathrm{ba}_M^{\mathscr{G}}[f] - \sum_{\nu=1}^{M} g_\nu^*(f)\, g_\nu]$$

$$+ E_N^{\mathscr{H}}[\sum_{\nu=1}^{M} g_\nu^*(f)\, g_\nu]$$

$$\leq \|\, f - \mathrm{ba}_M^{\mathscr{G}}[f] \,\| + E_N^{\mathscr{H}}[\sum_{\nu=1}^{M} g_\nu^*(\mathrm{ba}_M^{\mathscr{G}}[f] - f)\, g_\nu]$$

$$+ E_N^{\mathscr{H}}[\sum_{\nu=1}^{M} g_\nu^*(f)\, g_\nu]$$

$$\leq E_M^{\mathscr{G}}[f] + \sum_{\nu=1}^{M} | g_\nu^* (\mathrm{ba}_M^{\mathscr{G}}[f] - f) | E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] + E_N^{\mathscr{H}}[\sum_{v=1}^{M} g_v^*(f)\, g_v]$$

$$\leq E_M^{\mathscr{G}}[f] + E_N^{\mathscr{G}}[f] \sum_{\nu=1}^{M} \| g_\nu^* \| E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu]$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{M} | g_\nu^*(f) | E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] .$$

Hieraus folgt wegen (2,6) schon die Behauptung.

Zusatz: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq E_M^{\mathscr{G}}[f]\,[1 + \vartheta^{-1} \sum_{\nu=1}^{M} E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu]] + \vartheta^{-1} \| f \| E_N^{\mathscr{H}}[g_1]$$

$$+ \vartheta^{-1} \sum_{\nu=2}^{M} E_{\nu-1}^{\mathscr{G}}[f]\, E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] .$$

Beweis: Siehe (2,7).

Satz 2: Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

(i) $\mathscr{G}$ ist ein *Bessel*sches System.

(ii) Es gibt Zahlen c_1 und $p \geq 1$ derart, daß

$$E_N^{\mathscr{H}}[g_\varkappa] \leq \frac{c_1}{N} \quad 1 \leq \varkappa \leq \frac{N}{p} \tag{3,2}$$

für alle N gilt.

Dann ist $\mathscr{H}$ vom *Jackson*schen Typ, wenn $\mathscr{G}$ es ist.

Beweis: Setzt man (3,2) in (3,1) ein (mit $M = \left[\frac{N}{p}\right]$, $N \geq 2\,p$), so erhält man

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq E_M^{\mathscr{G}}[f]\,[1 + \vartheta^{-1} c_1] + \frac{c_1}{N} \sum_{\nu=1}^{M} | g_\nu^*(f) | . \tag{3,3}$$

Es sei $M = 2^j + r$ mit $0 \leq r < 2^j$. Zur Abkürzung werde $g_\nu^*(f) = a_\nu$ gesetzt. Die Summe $\sum_{\nu=1}^{M} | a_\nu |$ schätzt man mit Hilfe der *Cauchy-Schwarz*schen Ungleichung und mit (2,9) folgendermaßen ab:

$$\sum_{\nu=1}^{M} | a_\nu | = | a_1 | + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\nu=2^i+1}^{2^{i+1}} | a_\nu | + \sum_{\nu=2^j+1}^{M} | a_\nu |$$

$$\leq | a_1 | + \sum_{i=0}^{j-1} \sqrt{2^i}\, [\sum_{\nu=2^i+1}^{2^{i+1}} a_\nu^2]^{\frac{1}{2}} + \sqrt{r}\, [\sum_{\nu=2^j+1}^{M} a_\nu^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq | a_1 | + C \sum_{i=0}^{j-1} \sqrt{2^i}\, E_{2^i}^{\mathscr{G}}[f] + C \sqrt{r}\, E_{2^j}^{\mathscr{G}}[f]$$

$$\leq |a_1| + C\,E_1^{\mathscr{G}}[f] + C \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\sqrt{2^i}}{2^{i-1}} \sum_{\nu=2^{i-1}}^{2^i-1} E_\nu^{\mathscr{G}}[f]$$

$$+ C \frac{\sqrt{r}}{2^{j-1}} \sum_{\nu=2^{j-1}}^{2^j-1} E_\nu^{\mathscr{G}}[f]$$

$$\leq |a_1| + C\,E_1^{\mathscr{G}}[f] + 2\,C \sum_{\nu=1}^{M} \frac{E_\nu^{\mathscr{G}}[f]}{\sqrt{\nu}}$$

$$\leq \vartheta^{-1}\,||f|| + 3\,C \sum_{\nu=1}^{M} \frac{E_\nu^{\mathscr{G}}[f]}{\sqrt{\nu}}$$

Setzt man das in (3,3) ein, so ergibt sich

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq E_M^{\mathscr{G}}[f]\,[1 + \vartheta^{-1} c_1] + \vartheta^{-1} c_1 \frac{||f||}{N} + \frac{3\,C\,c_1}{N} \sum_{\nu=1}^{M} \frac{E_\nu^{\mathscr{G}}[f]}{\sqrt{\nu}} \tag{3,4}$$

Man beachtet nun, daß $\mathscr{G}$ vom *Jackson*schen Typ ist und hat wegen

$$\sum_{\nu=1}^{M} \frac{\omega(f;\nu^{-1})}{\sqrt{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{M} \frac{1}{\nu^{1,5}} \frac{\omega(f;\nu^{-1})}{\nu^{-1}} \leq 2\,M\,\omega(f;M^{-1}) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1,5}}$$

(hier ist eine bekannte Beziehung für den Stetigkeitsmodul benützt, siehe etwa [14] p. 99) und

$$\omega(f;M^{-1}) \leq ([2\,p]+1)\,\omega(f;N^{-1})$$

sofort Satz 2 bewiesen.

Übrigens führt (3,4) häufig zu präziseren Aussagen. Zum Beispiel erhält man ohne Schwierigkeit: Gibt es Zahlen K_ν derart, daß $\nu\,K_\nu$ monoton wächst und $E_\nu^{\mathscr{G}}[f] \leq K_\nu$ ist, so gilt

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq \text{const}\,(K_N + ||f||\,N^{-1})\,.$$

Ein bemerkenswerter Spezialfall hiervon ist:
Aus $E_N^{\mathscr{G}}[f] = O(N^{-1})$ folgt $E_N^{\mathscr{H}}[f] = O(N^{-1})$.

§ 4. Erste Anwendungen von Satz 2

Satz 3: Es sei $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ ein beschränktes Orthonormalsystem vom *Jackson*schen Typ und es gelte

$$h_\varkappa = g_\varkappa - \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\mu}\, g_\mu \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, \tag{4,1}$$

wobei mit einem $\eta < 1$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |\alpha_{\varkappa\mu}| \leq \eta \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots \tag{4,2}$$

ist und es eine Konstante C gibt derart, daß

$$\sum_{\mu > N} |\alpha_{\varkappa\mu}| < \frac{C}{N} \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots N; N = 1, 2, \ldots \tag{4,3}$$

ist.

Dann ist $\mathscr{H} = \{h_1, h_2, \ldots\}$ vom *Jackson*schen Typ.

In diesem Satz kommt das Prinzip der kleinen Änderung besonders deutlich zum Ausdruck. Um ihn auf Satz 2 zurückzuführen, hat man die Existenz einer Konstanten c_1 mit

$$E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] \leq \frac{c_1}{N} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N$$

nachzuweisen. Der Beweisgedanke besteht darin, durch Umkehrung der Entwicklung der $h_\varkappa$ nach den g_μ zu einer Entwicklung der g_μ nach den $h_\varkappa$ zu kommen, mit deren Hilfe sich dann $E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu]$ abschätzen läßt.

Beweis: Man definiert

$$\alpha_{\varkappa\mu}^{(1)} = \alpha_{\varkappa\mu} \quad \alpha_{\varkappa\mu}^{(p+1)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} \alpha_{\nu\mu}\,.$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn die Reihen konvergieren absolut. Es ist nämlich wegen (4,2) $|\alpha_{\nu\mu}| \leq \eta$ und nur die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\varkappa\nu}^{(p)}|$ nachzuweisen. Das geschieht durch vollständige Induktion nach p. Bei $p = 1$ hat man gerade die Voraussetzung (4,2). Es sei die Behauptung schon für ein p bewiesen.

Dann gilt

$$\sum_{\mu=1}^{M} |\alpha_{\varkappa\mu}^{(p+1)}| = \sum_{\mu=1}^{M} \Big| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} \alpha_{\nu\mu} \Big|$$
$$\leq \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} \alpha_{\nu\mu}| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\varkappa\nu}^{(p)}| \sum_{\mu=1}^{M} |\alpha_{\nu\mu}| \leq \eta \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\varkappa\nu}^{(p)}|\,.$$

Also ist die Behauptung auch für $p + 1$ richtig und zugleich folgt

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |\alpha_{\varkappa\mu}^{(p+1)}| \leq \eta^{p+1}\,. \tag{4,4}$$

Nun war

$$h_\nu = g_\nu - \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu}\, g_\mu\,. \tag{4,5}$$

Also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} h_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} g_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu}\, g_\mu$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} g_\nu - \sum_{\mu=1}^{\infty} g_\mu \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} \alpha_{\nu\mu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} g_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(p+1)} g_\nu$$

wobei die Vertauschung der Summationen wegen der Norm-Konvergenz der auftretenden Reihen leicht zu rechtfertigen ist.

Schreibt man diese Gleichungen für $p = 1, 2, \ldots, l$ hin und addiert noch (4,1), so erhält man

$$h_\varkappa + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(1)} h_\nu + \ldots + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(l)} h_\nu = g_\varkappa - \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\nu}^{(l+1)} g_\nu .$$

Daraus folgt sofort

$$E_N^{\mathscr{H}} [g_\varkappa] \leq (1 + \eta) \sup_\nu \| g_\nu \| \left(\sum_{p=1}^{l} \sum_{\nu > N} | \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} | + \sum_{\nu=1}^{\infty} | \alpha_{\varkappa\nu}^{(l+1)} | \right) \tag{4,6}$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots, N .$$

Durch vollständige Induktion nach p wird nun bewiesen, daß

$$\sum_{\nu > N} | \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} | \leq p\, C \frac{\eta^{p-1}}{N} \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, N$$

ist. Für $p = 1$ ist das wegen (4,3) richtig.
Es ist

$$\sum_{\nu > N} | \alpha_{\varkappa\nu}^{(p+1)} | = \sum_{\nu > N} \left| \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\varkappa\mu}^{(p)} \alpha_{\mu\nu} \right| \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} | \alpha_{\varkappa\mu}^{(p)} | \sum_{\nu > N} | \alpha_{\mu\nu} |$$

$$= \sum_{\mu=1}^{N} | \alpha_{\varkappa\mu}^{(p)} | \sum_{\nu > N} | \alpha_{\mu\nu} | + \sum_{\mu > N} | \alpha_{\varkappa\mu}^{(p)} | \sum_{\nu > N} | \alpha_{\mu\nu} |$$

$$\leq \frac{C}{N} \sum_{\mu=1}^{N} | \alpha_{\varkappa\mu}^{(p)} | + \eta \sum_{\mu > N} | \alpha_{\varkappa\mu}^{(p)} |$$

$$\leq \frac{C}{N} \eta^p + \eta\, p\, C \frac{\eta^{p-1}}{N} = (p + 1)\, C \frac{\eta^p}{N}$$

Dabei ist von (4,2), (4,3), (4,4) und der Induktionsvoraussetzung Gebrauch gemacht. Man kann jetzt abschätzen

$$\sum_{p=1}^{l} \sum_{\nu > N} | \alpha_{\varkappa\nu}^{(p)} | \leq \frac{C}{N} \sum_{p=1}^{l} p\, \eta^{p-1} < \frac{C}{N} \frac{1}{(1 - \eta)^2}$$

Setzt man das in (4,6) ein und beachtet noch (4,4), dann folgt sogleich die gewünschte Abschätzung

$$E_N^{\mathscr{H}}[g_\varkappa] \leq (1+\eta) \sup_\nu \| g_\nu \| \frac{1}{(1-\eta)^2} \frac{C}{N}.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Als Anwendung von Satz 3 sei noch notiert

Satz 4: Das Funktionensystem

$$h_\nu(x) = \cos \lambda_\nu x \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

mit

$$|\lambda_\nu - \nu + 1| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{\nu \ln 2\nu}$$

ist vom *Jackson*schen Typ im Raum $C[0, \pi]$.

Der Beweis geht davon aus, daß das Orthogonalsystem

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad g_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(\nu - 1)x \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

ein *Jackson*sches System für $C[0, \pi]$ ist und benutzt die *Fourier*sche Reihe

$$\cos \lambda_\nu x = \frac{2\lambda_\nu \sin \lambda_\nu \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2\lambda_\nu^2} - \frac{\cos x}{\lambda_\nu^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{\lambda_\nu^2 - 2^2} - + \ldots \right]$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$\lambda_\nu \notin \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

Die weitere Rechnung ist etwas mühsam, aber durchaus elementar.

§ 5. Anwendung von Satz 2 auf Eigenfunktionen

Lemma 1: Die zu einer selbstadjungierten und regulären Eigenwertaufgabe ist selbstadjungiert und regulär.

Beweis: Die Regularität der reduzierten Aufgabe folgt unmittelbar aus der Definition der Regularität.

Den Nachweis der Selbstadjungiertheit beginnen wir damit, daß wir die Normierung der Randbedingungen (§ 2) noch etwas weiter treiben. Die erste Randbedingung heißt ja

$$\alpha_1 y^{(h_1)}(0) + \beta_1 y^{(h_1)}(1) + \ldots = 0$$

wo für … noch Ableitungen niedrigerer Ordnung zu setzen sind. Ist $\alpha_1 \neq 0$, dann kann man durch Einsetzen $y^{(h_1)}(0)$ aus allen weiteren Randbedingungen entfernen. Ist $\alpha_1 = 0$, dann muß $\beta_1 \neq 0$ sein und man kann mit $y^{(h_1)}(1)$

entsprechend vorgehen. Wir denken uns diese Operation ausgeführt, dabei bleiben die Randbedingungen normiert. Anschließend formt man, ausgehend von der zweiten Randbedingung, die höheren in analoger Weise um.

So fortfahrend, erhält man ein System von normierten Randbedingungen, das die folgende Eigenschaft hat: Es gibt aus der Menge der $y^{(\nu)}(0)$, $y^{(\nu)}(1)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ $2n$ „ausgezeichnete" Elemente, von denen jedes in genau einer Randbedingung vorkommt. Die nicht ausgezeichneten Elemente können also ganz beliebig gewählt werden, man kann die ausgezeichneten immer so bestimmen, daß die Randbedingungen erfüllt werden.

Wir nehmen nun an, die reduzierte Aufgabe wäre nicht selbstadjungiert. Dann wäre der Randteil

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^{\nu} \left[y^{(2n-1-\nu)}(1)\, z^{(\nu)}(1) - y^{(2n-1-\nu)}(0)\, z^{(\nu)}(0)\right]$$

nicht für alle y und z, die den Randbedingungen genügen, identisch Null. Ersetzte man also hierin die ausgezeichneten $y^{(\nu)}(0)$, $y^{(\nu)}(1)$ und die entsprechenden $z^{(\nu)}(0)$, $z^{(\nu)}(1)$ durch die Ausdrücke, denen sie auf Grund der Randbedingungen gleich sind, so würde sich schließlich nicht alles wegheben.

Die zuletzt genannte Operation nehmen wir auch mit dem Randteil der ursprünglichen Aufgabe vor. Die entstehenden Summanden haben die Form const $y^{(\nu)}(a)\, z^{(\mu)}(b)$, wo a und b die Werte 0 oder 1 annehmen. Wir bezeichnen $\mu + \nu$ als die Stufe des Summanden und stellen fest, daß durch die vorgenommene Operation die Stufen nicht erhöht werden. Die entstandenen Summanden der Stufe $2n-1$ können somit nur aus Summanden gleicher Stufe hervorgegangen sein, und da dieser Übergang nur von den Zahlen α_ν, β_ν abhängt, ist er identisch mit dem Übergang bei der reduzierten Aufgabe. Es bleiben also Summanden der Stufe $2n-1$ stehen, und nach einer früheren Überlegung können diese sich auch nicht gegen eventuell noch vorhandene Summanden niedrigerer Stufe wegheben. Somit wäre die ursprüngliche Aufgabe nicht selbstadjungiert, ein Widerspruch, der unser Lemma beweist.

Für das Folgende benötigen wir eine Abschätzung für die Ableitungen der Eigenfunktionen. Zur Abkürzung setzen wir

$$M_\nu = M_\nu[f] = \sup_{a \le x \le b} |f^{(\nu)}(x)| \quad \nu = 0, 1, \ldots .$$

Ausgangspunkt ist ein Ergebnis von *Neder* [15], nämlich

Lemma 2: Es sei $f \in C^r[a, b]$*) $l = |a - b|$. Es gilt

$$M_h[f] \le (2r)^{2r}\, l^{-h} M_0[f] + l^{r-h} M_r[f]$$

$$h = 0, 1, 2, \ldots r$$

---

*) *Neder* setzt voraus, daß f beliebig oft differenzierbar ist. Sein Beweis ergibt aber das angegebene schärfere Resultat.

Daraus folgert man mit einer Methode, die auch von *Neder* verwendet wird:

Lemma 3: Es sei $a = 0$, $b = 1$, $f \in C^r\,[0,1]$. Es gilt

$$M_h\,[f] \leq \begin{cases} ((2\,r)^{2r} + 1)\, M_0^{1-\frac{h}{r}}\, M_r^{\frac{h}{r}} & \text{falls } M_0 \leq M_r \\ ((2\,r)^{2r} + 1)\, M_0 & \text{falls } M_0 > M_r \end{cases}$$

Zum Beweis des nichttrivialen Falles $M_0 \leq M_r$ setze man $l = \dfrac{M_0^{\frac{1}{r}}}{M_r}$ in Lemma 2 ein.

Wir betrachten nun die Eigenwertaufgabe (2,10) mit regulären Randbedingungen. Die Eigenfunktionen $y_\mu\,(x)$ seien nach wachsenden Eigenwerten geordnet und durch $M_0\,[y_\mu] = 1$ normiert.

Mit $c_1, c_2, \ldots$ werden in diesem Abschnitt Zahlen bezeichnet, die nur von L und den Randbedingungen abhängen. Aus (2,10) folgt

$$|\, M_{2n}\,[y_\mu] - |\lambda_\mu\,||\leq c_1\,(M_{2n-2}\,[y_\mu] + \ldots + M_1\,[y_\mu] + 1)$$

Enthielte die Folge $M_{2n}\,[y_\mu]\,(\mu = 1, 2, \ldots)$ eine beschränkte Teilfolge, dann bliebe nach Lemma 3 die rechte Seite dieser Ungleichung für diese Teilfolge beschränkt, die linke wegen $|\,\lambda_\mu\,| \to \infty$ aber nicht — Widerspruch. Also ist $M_{2n}\,[y_\mu] > 1$ für alle genügend großen μ. Nach Lemma 3 folgt damit

$$|\, M_{2n}\,[y_\mu] - |\,\lambda_\mu\,|| \leq c_2\, M_{2n}^{\frac{2n-2}{2n}}\,[y_\mu]\,,$$

d. h.

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{|\,\lambda_\mu\,|}{M_{2n}\,[y_\mu]} = 1\,.$$

Wendet man abermals Lemma 3 an und zieht noch (2,14) heran, dann folgt hieraus

Lemma 4: Es ist

$$M_h\,[y_\mu] \leq c_3\,\mu^h$$

Wir wollen jetzt, um den Anschluß an die Entwicklungen von § 3 zu finden, die orthonormierten Eigenfunktionen der zugrunde liegenden Eigenwertaufgabe mit h_ν, die der zugehörigen reduzierten Aufgabe mit g_ν bezeichnen.

Wir bemerken noch, daß Normen in diesem Abschnitt stets als sup-Normen zu verstehen sind und können dann als den wichtigsten Hilfssatz formulieren:

Lemma 5: Es gibt eine Zahl $\varkappa_0$, die nur von L und den Randbedingungen abhängt so, daß für alle μ und ν mit $|\,\mu - \nu\,| > \varkappa_0$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|\,(h_\mu, g_\nu)\,| \leq c_4\,\frac{\nu^{2n-2} + \mu^{2n-2}}{|\,\mu^{2n} - \nu^{2n}\,|}\,||\,g_\nu\,||\,||h_\mu\,||\,.$$

Beweis: Wir werden hier und später die folgenden Bezeichnungen benützen: Die Eigenwerte der ursprünglichen Aufgabe heißen λ_ν, die der reduzierten Aufgabe ϱ_ν, D ist der Ableitungsoperator: $D f = f'$.
Es gilt

$$\begin{aligned}\varrho_\nu (h_\mu, g_\nu) &= (h_\mu, D^{2n} g_\nu) = R_{\mu\nu} + (D^{2n} h_\mu, g_\nu) \\ &= R_{\mu\nu} + (L h_\mu, g_\nu) + ((D^{2n} - L) h_\mu, g_\nu) \\ &= \lambda_\mu (h_\mu, g_\nu) + R_{\mu\nu} + ((D^{2n} - L) h_\mu, g_\nu) .\end{aligned}$$

Dabei bedeutet $R_{\mu\nu}$ den Randteil

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{2n-1} (-1)^\varkappa \, [h_\mu^{(\varkappa)} (1) \, g_\nu^{(2n-1-\varkappa)} (1) - h_\mu^{(\varkappa)} (0) \, g_\nu^{(2n-1-\varkappa)} (0)] \, . \qquad (5,1)$$

Es folgt

$$| (h_\mu, g_\nu) | \leq \frac{| R_{\mu\nu} |}{| \, | \varrho_\nu | - | \lambda_\mu | \, |} + \frac{|((D^{2n} - L) \, h_\mu, g_\nu)|}{| \, | \varrho_\nu | - | \lambda_\mu | \, |} \qquad (5,2)$$

falls $| \varrho_\nu | - | \lambda_\mu | \neq 0$. Diese Bedingung läßt sich aber durch Wahl eines genügend großen $\varkappa_0$ erfüllen, man kann auf diesem Wege sogar erreichen, daß

$$| \, | \varrho_\nu | - | \lambda_\mu | \, | \geq \tfrac{1}{2} \pi^{2n} \, | \nu^{2n} - \mu^{2n} | \qquad (5,3)$$

für die fraglichen μ und ν gilt. Ein Vergleich mit (2,14) lehrt, daß zum Beweise dieser Behauptung nur zu zeigen ist, daß durch passende Wahl von $\varkappa_0$

$$J = \inf_{|\mu - \nu| > \varkappa_0} \frac{| \mu^{2n} - \nu^{2n} |}{\mu^{2n-1} + \nu^{2n-1}}$$

beliebig groß gemacht werden kann. Man kann aus Symmetriegründen $\nu > \mu + \varkappa_0$ voraussetzen, und hat dann die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} J &> \frac{\nu^{2n} - (\nu - \varkappa_0)^{2n}}{2 \, \nu^{2n-1}} = \frac{1}{2} \left[\nu - (\nu - \varkappa_0) \left(1 - \frac{\varkappa_0}{\nu} \right)^{2n-1} \right] \\ &\geq \frac{\nu}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{\varkappa_0}{\nu} \right) \right] = \frac{\varkappa_0}{2} , \end{aligned}$$

aus der die Behauptung folgt.
Zur Abschätzung des Terms

$$((D^{2n} - L) \, h_\mu, g_\nu)$$

benutzt man die Bemerkung, daß $D^{2n} - L$ ein Differentialoperator der Ordnung $2n - 2$ ist und Lemma 4. Man erhält

$$\begin{aligned} &| ((D^{2n} - L) \, h_\mu, g_\nu) | \qquad (5,4) \\ &\leq c_5 \, \mu^{2n-2} \, || h_\mu || \, || g_\nu || \, . \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung von $R_{\mu\nu}$ bedenkt man folgendes: Würde $h_\mu(x)$ den reduzierten Randbedingungen genügen, dann wäre $R_{\mu\nu} \equiv 0$. Nun unterscheiden sich die wirklichen Randbedingungen von den reduzierten um Glieder niederer Ableitungsordnung. Setzt man sie in (5,1) ein, so läßt sich damit $R_{\mu\nu}$ in eine Form bringen, in der nur noch Summanden der Stufe $\leq 2n-2$ auftreten. In dieser Form schätzt man $R_{\mu\nu}$ durch Anwendung von Lemma 4 ab und erhält

$$| R_{\mu\nu} | \leq c_6 (\mu^{2n-2} + \nu^{2n-2}) \| g_\nu \| \| h_\mu \| \tag{5,5}$$

Setzt man nun (5,3), (5,4) und (5,5) in (5,2) ein, dann erhält man Lemma 5.

Lemma 6: Gibt es eine Zahl G mit $\| g_\nu \| \leq G$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ dann gibt es auch eine Zahl H mit $\| h_\nu \| \leq H$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Beweis: Man zeigt zunächst die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | (g_\nu, h_\mu) |, \quad \mu \text{ fest.} \tag{5,6}$$

Da nach der *Schwarz*schen Ungleichung

$$| (g_\nu, h_\mu) | \leq 1$$

ist, hat man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | (g_\nu, h_\mu) | \leq \sum_{\nu=1}^{\mu-\varkappa_0-1} | (g_\nu, h_\mu) | + 2\varkappa_0 + 1 + \sum_{\nu=\mu+\varkappa_0+1}^{\infty} | (g_\nu h_\mu) | . \tag{5,7}$$

Bei der Abschätzung der Summen verwendet man Lemma 5. Wir führen die Rechnung nur für die zweite Summe aus, die Abschätzung der ersten verläuft ähnlich.

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu > \mu + \varkappa_0} | (g_\nu, h_\mu) | &\leq 2 c_4 G \| h_\mu \| \sum_{\nu > \mu + \varkappa_0} \frac{\nu^{2n-2}}{\nu^{2n} - \mu^{2n}} \\
&= 2 c_4 G \| h_\mu \| \left(\sum_{\nu > \mu + \varkappa_0} \nu^{-2} + \mu^{2n} \sum_{\nu > \mu + \varkappa_0} \frac{1}{\nu^2} \frac{1}{\nu^{2n} - \mu^{2n}} \right) \\
&\leq 2 c_4 G \| h_\mu \| \left(\mu^{-1} + \mu^{2n-2} \sum_{\nu > \mu + \varkappa_0} \frac{1}{(\nu^2 - \mu^2)\, n\, \mu^{2n-2}} \right) \\
&= 2 c_4 G \| h_\mu \| \left(\mu^{-1} + \frac{1}{2 n \mu} \left(\frac{1}{\varkappa_0 + 1} + \frac{1}{\varkappa_0 + 2} + \cdots \frac{1}{\varkappa_0 + 2\mu} \right) \right) \\
&\leq c_7 \| h_\mu \| \frac{\ln 2\mu}{\mu} .
\end{aligned}$$

Aus der hiermit bewiesenen Konvergenz von (2,6) folgt wegen der Vollständigkeit des Systems $\mathscr{G}$

$$h_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\mu, g_\nu)\, g_\nu \tag{5,8}$$

Indem man die schon bei (5,7) benutzte Zerlegung der Summe verwendet, findet man

$$\| h_\mu \| \leq G\,(2\,\varkappa_0 + 1) + c_8 \frac{\ln 2\,\mu}{\mu} \| h_\mu \|$$

oder

$$\left(1 - c_8 \frac{\ln 2\,\mu}{\mu}\right) \| h_\mu \| \leq G\,(2\,\varkappa_0 + 1)$$

und hieraus folgt die Existenz von H.

Lemma 7: Wenn $\mathscr{G}$ gleichmäßig beschränkt ist, dann gilt

$$E_N^{\mathscr{H}}\,[g_\nu] \leq \frac{c_9}{N} \quad 1 \leq \nu \leq \frac{N}{2}$$

Beweis: Die Entwicklung

$$g_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} (h_\mu, g_\nu)\, h_\mu$$

deren Beweis man wie den von (5,8) führen kann, gibt sogleich

$$E_N^{\mathscr{H}}\,[g_\nu] \leq H \sum_{\mu > N} |\,(h_\mu, g_\nu)\,|\,.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N > \varkappa_0$ voraussetzen und dann die Abschätzung der Summe nach dem Muster der Abschätzung bei Lemma 6 durchführen.

Man erhält

$$E_N^{\mathscr{H}}\,[g_\nu] \leq \frac{c_{10}}{N}\left(1 + \frac{1}{2\,n}\left(\frac{1}{N - \nu + 1} + \cdots \frac{1}{N + \nu}\right)\right)$$

$$\leq \frac{c_9}{N}$$

Damit ist Lemma 7 bewiesen und eine Anwendung von Satz 2 mit $p = 2$ gibt nun sofort

Satz 5: Es sei $\mathscr{H}$ das System der Eigenfunktionen einer selbstadjungierten regulären Eigenwertaufgabe und $\mathscr{G}$ das System der Eigenfunktion der zugehörigen rduzierten Aufgabe. $\mathscr{G}$ sei gleichmäßig beschränkt. Dann gilt: Ist $\mathscr{G}$ vom *Jackson*schen Typ, dann auch $\mathscr{H}$.

Die beiden früher erwähnten Zusatzvoraussetzungen sind also die Regularität der Randbedingungen und die Beschränktheit von $\mathcal{G}$. Ob sie erfüllt sind, läßt sich in jedem Einzelfall leicht nachprüfen, als allgemeineres Resultat in dieser Richtung nennen wir

Satz 6: Bei den folgenden Typen von Randbedingungen ist $\mathcal{G}$ gleichmäßig beschränkt:

a) Periodische Randbedingungen
b) Antiperiodische Randbedingungen
c) Selbstadjungierte Randbedingungen bei Aufgaben zweiter Ordnung
d) *Sturm*sche Randbedingungen

Daß alle diese Typen regulär sind, ist schon in § 2 erwähnt worden.

Beweis: Fall a) und b) sind klar, man kann ja $\mathcal{G}$ explizit hinschreiben. Der Beweis im Fall c) beruht darauf, daß die Elemente von $\mathcal{G}$ die Form

$$g_\nu(x) = a_\nu \cos \varrho_\nu x + b_\nu \sin \varrho_\nu x$$

haben; da $(g_\nu, g_\nu) = 1$ ist, muß $a_\nu^2 + b_\nu^2 = 2 + O(\varrho_\nu^{-1})$ sein, und daraus folgt die Beschränktheit. Fall d) ist schwieriger, aus dem früher genannten Grunde deuten wir den Beweis nur an. Es sei n gerade, dann sind die großen Eigenwerte ϱ_ν positiv. $\omega_1 \ldots \omega_{2n}$ seien die $2\,n$-ten Einheitswurzeln, und zwar seien sie so angeordnet, daß $\omega_1 \ldots \omega_{n-1}$ negativen Realteil haben, $\omega_n = i$, $\omega_{n+1} = -i$ ist und $\omega_{n+2} \ldots \omega_{2n}$ positiven Realteil haben.

Man kann nun zeigen (vgl. [12] p. 65–68), daß $\mathcal{G}$ in zwei Klassen $\mathcal{G}^1 = \{g_1^1, g_2^1, \ldots\}$ und $\mathcal{G}^2 = \{g_1^2, \ldots\}$ zerfällt derart, daß für die nichtnormierten g_ν die folgenden asymptotischen Ausdrücke gelten:

$$g_\nu^i(x) = \sum_{\varkappa=1}^{n-1} A_\varkappa^{(i)} e^{\omega_\varkappa \eta_\nu x} + B^{(i)} e^{i\eta_\nu x} + \overline{B}^{(i)} e^{-i\eta_\nu x}$$
$$+ \sum_{\varkappa=n+2}^{2n} C_\varkappa^{(i)} e^{\omega_\varkappa \eta_\nu (x-1)} + O(\nu^{-1})$$

Hier ist $\eta_\nu = \sqrt[2n]{|\varrho_\nu|}$ gesetzt.

Das Wesentliche an dieser Formel ist, daß die Koeffizienten $A_\varkappa^{(i)}$, $B_\varkappa^{(i)}$, $C_\varkappa^{(i)}$ nicht von ν abhängen. Bildet man nun (g_ν, g_ν), dann sieht man, daß die Beschränktheit sogleich folgt, wenn nur $B^{(i)} \neq 0$ nachgewiesen werden kann. $B^{(i)}$ läßt sich als Produkt von zwei Determinanten schreiben. Drückt man alle ω_i durch eine primitive $2\,n$-te Einheitswurzel aus, dann lassen sich diese Determinanten auf *Vandermonde*sche zurückführen, die $\neq 0$ sind.

§ 6. Spezialisierung auf Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung

Wir definieren zunächst: Diejenigen unter den (normierten) Randbedingungen einer Eigenwertaufgabe zweiter Ordnung, die keine Ableitungen enthalten, heißen wesentliche Randbedingungen. Damit können wir aussprechen

Satz 7: Es sei $\mathscr{H}$ das System der nach wachsenden Eigenwerten geordneten Eigenfunktionen der selbstadjungierten Eigenwertaufgabe

$$y''(x) + l(x)\,y(x) = \lambda\, y(x) \qquad U_1[y] = U_2[y] = 0\,. \tag{6,1}$$

Es gibt eine nur von l und den U_ν abhängende Zahl c derart, daß für alle $f \in C[0,1]$, die den wesentlichen Randbedingungen genügen,

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq c\,(\omega(f;\,N^{-1}) + \|f\|\,N^{-1})$$

gilt.

Beweis: Um diesen Satz auf Satz 5 zurückzuführen, hat man die zugehörigen reduzierten Aufgaben aufzustellen und zu zeigen, daß ihre Lösungen vom *Jackson*schen Typ sind. Die Beschränktheitsvoraussetzung ist ja nach Satz 6 Fall c) erfüllt.

Nun gibt es offenbar nur die folgenden Typen von reduzierten Randbedingungen

Typ I $\quad y(0) = y(1) = 0$

Typ II $\quad y'(0) = y'(1) = 0$

Typ III $\quad \alpha_1\, y(0) + \beta_1\, y(1) = 0 \quad \alpha_2\, y'(0) + \beta_2\, y'(1) = 0$

Man prüft sofort nach, daß Typ I und Typ II wirklich zu selbstadjungierten Aufgaben Anlaß geben, Typ III dagegen nur unter der Zusatzvoraussetzung $\alpha_1 = \beta_2$, $\alpha_2 = \beta_1$, die jetzt stets als erfüllt angenommen werde. Also

Typ III $\quad \alpha\, y(0) + \beta\, y(1) = 0 \quad \beta\, y'(0) + \alpha\, y'(1) = 0$
$\qquad |\alpha| + |\beta| > 0$

Es wird sich als zweckmäßig erweisen, hier noch zu unterteilen

Typ IIIa $\quad \alpha\, y(0) + \beta\, y(1) = 0 \quad \beta\, y'(0) + \alpha\, y'(1) = 0 \quad |\alpha| \neq |\beta| \quad \beta \geq 0$

Typ IIIb $\quad y(0) - y(1) = 0 \qquad y'(0) - y'(1) = 0$

Typ IIIc $\quad y(0) + y(1) = 0 \qquad y'(0) + y'(1) = 0$

Die Lösungen der reduzierten Aufgabe sind:

Typ I $\quad g_\nu(x) = \sqrt{2}\sin \nu\pi x$

Typ II $\quad g_1(x) = 1 \quad g_\nu(x) = \sqrt{2}\cos(\nu - 1)\pi x \qquad \nu = 2, 3, \ldots$

Typ IIIa $\quad g_{2\nu-1}(x) = \sqrt{2}\cos[(2\nu - 2 + \sigma)\pi x + \tau]\,,$

$\qquad g_{2\nu}(x) = \sqrt{2}\cos[(2\nu - \sigma)\pi x - \tau]\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$

wo σ und τ bestimmt sind durch $\cos\sigma\pi = -\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$

$$0 < \sigma < 1 \text{ und } \cos\tau = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\,;\ \sin\tau = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\cdot \operatorname{sgn}(\alpha^2 - \beta^2)$$

Typ IIIb $\quad g_1(x) = 1\,,\ g_{2\nu}(x) = \sqrt{2}\cos 2\nu\pi x\,,$

$\qquad g_{2\nu+1}(x) = \sqrt{2}\sin 2\nu\pi x$

Typ IIIc $\quad g_{2\nu-1}(x) = \sqrt{2}\cos(2\nu - 1)\pi x\,,$

$\qquad g_{2\nu} = \sqrt{2}\sin(2\nu - 1)\pi x$

Daß Typ IIIb vom *Jackson*schen Typ ist, ist gerade *Jacksons* Satz. Auf ihn lassen sich die Typen I, II, IIIc durch einfache Symmetrieüberlegungen zurückführen.

Etwas schwieriger ist Typ IIIa. Man setzt hier

$$S_N[f] = (f, g_1)\, g_1 + \sum_{\nu=1}^{N} d_{N\nu}\,[(f, g_{2\nu})\, g_{2\nu} + (f, g_{2\nu+1})\, g_{2\nu+1}]$$

mit noch zu bestimmenden $d_{N\nu}$. Setzt man die g_ν ein, dann erhält man nach leichten Umformungen

$$\begin{aligned} S_N[f] = {} & \\ & 2\int_0^1 f(x) \cos \sigma \pi (x-t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} d_{N\nu} \cos 2\nu\pi(x-t)\right] dx \\ & + 2\int_0^1 f(x) \cos(\sigma\pi(x+t) + 2\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{N} d_{N\nu} \cos 2\nu\pi(x+t)\right] dx\,. \end{aligned}$$

Im zweiten Integral substituiert man $x = 1 - u$ und beachtet die leicht zu verifizierenden Beziehungen

$$\cos(\sigma\pi + 2\tau) = 0\,,\ \sin(\sigma\pi + 2\tau) = \operatorname{sgn}(\beta^2 - \alpha^2)\,.$$

Nach weiteren naheliegenden Umformungen erhält man

$$\begin{aligned} S_N[f] = {} & \\ & \cos\sigma\pi t \int_0^1 [f(x)\cos\sigma\pi x + f(1-x)\sin\sigma\pi x \operatorname{sgn}(\beta^2-\alpha^2)] \\ & \qquad \left[1 + 2\sum_{\nu=1}^{N} d_{N\nu}\cos 2\nu\pi(x-t)\right] dx \\ & + \sin\sigma\pi t \int_0^1 [f(x)\sin\sigma\pi x - f(1-x)\cos\sigma\pi x \operatorname{sgn}(\beta^2-\alpha^2)] \\ & \qquad \left[1 + 2\sum_{\nu=1}^{N} d_{N\nu}\cos 2\nu\pi(x-t)\right] dx \\ \equiv {} & \\ & \cos\sigma\pi t \int_0^1 \tilde f_1(x) \left[1 + 2\sum_{\nu=1}^{N} d_{N\nu}\cos 2\nu\pi(x-t)\right] dx \\ & + \sin\sigma\pi t \int_0^1 \tilde f_2(x) \left[1 + 2\sum_{\nu=1}^{N} d_{N\nu}\cos 2\nu\pi(x-t)\right] dx\,. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß $\tilde f_\varkappa(0) = \tilde f_\varkappa(1)$ $(\varkappa = 1, 2)$ ist, man muß nur beachten, daß f der wesentlichen Randbedingung $\alpha f(0) + \beta f(1) = 0$ genügt. Die $\tilde f_\varkappa$ lassen sich also stetig und mit der Periode 1 fortsetzen, dabei wird der

Stetigkeitsmodul höchstens verdoppelt. Aus der Theorie der trigonometrischen Approximation ist bekannt (z. B. [14] p. 465ff.), daß man die $d_{N\nu}$ so wählen kann, daß sich die Integrale um weniger als const $\omega(\tilde{f}_\varkappa; N^{-1})$ von $\tilde{f}_\varkappa$ unterscheiden, und wegen

$$\cos\sigma\pi t\,\tilde{f}_1(t) + \sin\sigma\pi t\,\tilde{f}_2(t) = f(t)$$

ist damit

$$\| S_N[f] - f \| \leq \text{const}\,\omega(\tilde{f}_1; N^{-1}) + \text{const}\,\omega(\tilde{f}_2; N^{-1})$$

bewiesen. Mit Heranziehung einfacher Eigenschaften des Stetigkeitsmoduls erhält man hieraus das gewünschte Ergebnis. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Unter den weiteren Anwendungen, die sich von Satz 5 machen lassen, sei noch hervorgehoben

Satz 8: Es sei $\mathscr{H}$ das nach wachsenden Eigenwerten geordnete System der Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe

$$L(y) = \lambda y \quad y^{(\varkappa)}(0) = y^{(\varkappa)}(1) \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, 2n-1 .$$

Dabei sei L ein Differentialoperator der Ordnung $2n$ derart, daß die Aufgabe selbstadjungiert ist. Es sei $f \in C[0,1]$ und $f(0) = f(1)$. Dann ist

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq c\,(\omega(f; N^{-1}) + N^{-1}\|f\|) .$$

Dabei bedeutet c eine Zahl, die nur von L abhängt.

§ 7. Verschärfung der Abschätzung in einem Spezialfall

In diesem Abschnitt wählen wir $[0, \pi]$ als Grundintervall.

Satz 9: Es sei $\mathscr{G}$ das Funktionensystem $\{g_1, g_2 \ldots\}$ mit

$$g_\nu = g_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\nu x .$$

$\mathscr{H}$ sei das nach wachsenden Eigenwerten geordnete System der Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe

$$y''(x) + l(x)\,y(x) = \lambda\,y(x) \quad y(0) = y(\pi) = 0 .$$

$l(x)$ habe eine beschränkte zweite Ableitung. Dann gilt für jedes $f \in C[0, \pi]$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] = E_N^{\mathscr{G}}[f] + o(N^{-1}) . \tag{7,1}$$

Hierin kann die Größenordnung $o(N^{-1})$ des Restgliedes für keine Eigenwertaufgabe mit $l(x) \neq \text{const}$ verbessert werden. Macht man die zusätzliche Voraussetzung $f \in C^1[0, \pi]$, dann gilt genauer

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] = E_N^{\mathscr{G}}[f] + o(N^{-2}) . \tag{7,2}$$

Beweis: Man geht aus von der Beziehung

$$E_N^{\mathscr{H}}[f - \mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]] - E_N^{\mathscr{H}}[\mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]] \leq E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq E_N^{\mathscr{H}}[f - \mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]] + + E_N^{\mathscr{H}}[\mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]] .$$

Die erste Behauptung des Satzes wird also bewiesen sein, wenn man

$$E_N^{\mathscr{H}}[f - \mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]] = E_N^{\mathscr{G}}[f] \tag{7,3}$$

und

$$E_N^{\mathscr{H}}[\mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]] = o\,(N^{-1}) \tag{7,4}$$

zeigen kann. Zum Beweis von (7,3) benutzt man eine Methode, die von *Scarpellini* [6] bei einem ähnlichen Problem angewandt wurde. Man geht davon aus, daß sowohl $\mathscr{G}$ als auch $\mathscr{H}$ *Haar*sche Systeme zweiter Art sind (zu diesem Begriff siehe [6] p. 277—278). Es folgt nach einem klassischen Satz der Approximationstheorie, daß $f - \mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]$ die Alternanteneigenschaft hat und also

$$\mathrm{ba}_N^{\mathscr{H}}[f - \mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]] = 0$$

ist, und das ist mit (7,3) äquivalent.

Zum Beweis von (7,4) schätzt man $E_N^{\mathscr{H}}[\mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]]$ ab wie beim Zusatz zu Satz 1 und erhält

$$E_N^{\mathscr{H}}[\mathrm{ba}_N^{\mathscr{G}}[f]] \leq \vartheta^{-1} E_N^{\mathscr{G}}[f] \sum_{\nu=1}^{N} E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] + \vartheta^{-1} \| f \| E_N^{\mathscr{H}}[g_1] + \vartheta^{-1} \sum_{\nu=2}^{N} E_{\nu-1}^{\mathscr{G}}[f]\, E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] .$$

Wenn man die weiter unten bewiesenen Ungleichungen

$$E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] \leq \mathrm{const}\, \frac{\nu}{N^{3,5}} \qquad 1 \leq \nu \leq \frac{N}{2} \tag{7,5}$$

$$E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] \leq \mathrm{const}\, \frac{1}{N\,(N+1-\nu)^{1,5}} \qquad \frac{N}{2} \leq \nu \leq N \tag{7,6}$$

hier einsetzt, einen bekannten Grenzwertsatz von *Toeplitz* ([16] p. 75) heranzieht und

$$\lim_{\nu \to \infty} E_\nu^{\mathscr{G}}[f] = 0 \tag{7,7}$$

beachtet, erhält man (7,4) und damit (7,1). (7,2) beweist man ganz ähnlich*), an Stelle von (7,7) tritt hier nur

$$\lim_{\nu \to \infty} \nu\, E_\nu^{\mathscr{G}}[f] = 0 .$$

---

*) Man sieht sofort, daß unter der Voraussetzung $f \in C^2[0, \pi]$, $f''(0) = f''(\pi)$

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] = E_N^{\mathscr{G}}[f] + o\,(N^{-3})$$

mit der gleichen Methode bewiesen werden kann. Auf diese Formel und ihre höheren Analoga will ich hier nicht weiter eingehen.

Um den noch ausstehenden Beweis von (7,5) und (7,6) zu erbringen, geht man ähnlich vor wie bei Lemma 7. Ungleichung (5,2) besagt hier

$$| (h_\mu, g_\nu) | \leq \frac{\left| \int_0^\pi l(x)\, h_\mu(x)\, g_\nu(x)\, dx \right|}{| \nu^2 - | \lambda_\mu | |}, \tag{7,8}$$

falls $\nu^2 \neq | \lambda_\mu |$. Auf das Integral im Zähler wird die Operation, die zur Herleitung von (7,8) diente, noch ein zweites Mal angewandt. Man erhält nach elementaren Zwischenrechnungen

$$\int_0^\pi l(x)\, h_\mu(x)\, g_\nu(x)\, dx = \frac{1}{\nu^2 + \lambda_\mu} \int_0^\pi h_\mu(x)\, g_\nu(x)\, [l^2(x) + l''(x)]\, dx$$
$$+ \frac{2\nu}{\nu^2 + \lambda_\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi h_\mu(x)\, l'(x) \cos \nu x\, dx .$$

Setzt man das in (7,8) ein und beachtet noch, daß für genügend große μ $\lambda_\mu < -(\mu - \frac{1}{2})^2$ ist ([11] p. 263), dann erhält man

$$| (h_\mu, g_\nu) | \leq \frac{3\nu}{((\mu - \frac{1}{2})^2 - \nu^2)^2} \left(\left| \int_0^\pi h_\mu(x)\, g_\nu(x)\, [l^2(x) + l''(x)]\, dx \right| \right.$$
$$\left. + \left| \int_0^\pi h_\mu(x)\, l'(x) \cos \nu x\, dx \right| \right).$$

$\mu > N \quad 1 \leq \nu \leq N \quad N > N_0$

Wendet man die *Schwarz*sche Ungleichung und anschließend die *Bessel*sche Ungleichung für das System $\mathscr{H}$ an, dann ergibt sich

$$E_N^{\mathscr{H}}[g_\nu] \leq H \sum_{\mu > N} | (h_\mu, g_\nu) | \leq$$
$$H \left[\sum_{\mu > N} \frac{9\nu^2}{[(\mu - \frac{1}{2})^2 - \nu^2]^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\int_0^\pi g_\nu^2(x)\, [l^2(x) + l''(x)]^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. + \left[\int_0^\pi (l'(x))^2 \cos^2 \nu x\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$
$$\leq 3\nu H \left[\sum_{\mu > N} \frac{1}{[(\mu - \frac{1}{2})^2 - \nu^2]^4} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\int_0^\pi [l^2(x) + l''(x)]^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. + \left[\int_0^\pi (l'(x))^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Hieraus folgt (7,5) sofort, (7,6) nach einer kleinen Rechnung.

Zum Beweis der Unverbesserbarkeit benötigt man das folgende

Lemma 8: Es sei $l(x) \neq \text{const}$. Dann gibt es ein $c_1 > 0$ und ein N_0 so, daß

$$E_N^{\mathscr{H}}[g_N] \geq \frac{c_1}{N} \quad N > N_0$$

gilt.

Beweis: Wir gehen aus von Formel (2,7), die wir — leicht verallgemeinert — schreiben

$$E_N^{\mathscr{H}}[g_N] \geq \vartheta \,|\, (h_{N+s}, g_N) \,| \,.$$

Hier sei $s \geq 1$ fest. Nun gilt ([11] p. 263)

$$h_{N+s}(x) = \sin(N+s)\,x - \frac{1}{2(N+s)}\left(x \int_0^\pi l(t)\,\mathrm{d}t - \pi \int_0^x l(t)\,\mathrm{d}t\right) \cos(N+s)\,x + O(N^{-2})\,.$$

Also

$$(h_{N+s}, g_N) = \int_0^\pi h_{N+s}(x) \sin N x \,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2(N+s)} \int_0^\pi l(t)\,\mathrm{d}t \int_0^\pi x \cos(N+s)\,x \sin N x\,\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{\pi}{2(N+s)} \int_0^\pi \left(\int_0^x l(t)\,\mathrm{d}t\right) \cos(N+s)\,x \sin N x\,\mathrm{d}x + O(N^{-2})$$

$$= \frac{1}{4(N+s)} \left[\int_0^\pi l(t)\,\mathrm{d}t \int_0^\pi x \sin s x\,\mathrm{d}x - \pi \int_0^\pi \left(\int_0^x l(t)\,\mathrm{d}t\right) \sin s x\,\mathrm{d}x\right] + O(N^{-2})$$

$$= \frac{\pi}{4(N+s)\,s} \int_0^\pi l(x) \cos s x\,\mathrm{d}x + O(N^{-2})\,.$$

Die letzte Umformung war eine partielle Integration. Man sieht, daß das Lemma bewiesen ist, wenn nicht

$$\int_0^\pi l(x) \cos s x\,\mathrm{d}x = 0 \tag{7,9}$$

ist. Gilt aber (7,9) für $s = 1, 2, \ldots$, dann ist mit

$$l^*(x) = l(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi l(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\pi l^*(x) \cos s x\,\mathrm{d}x = 0 \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

und wegen der Vollständigkeit des Cosinus-Systems folgt $l^*(x) \equiv 0$ d. h. $l(x) \equiv \text{const}$. Also gibt es ein s, für das (7,9) falsch ist, und das Lemma ist bewiesen.

Wir können nun zurückkehren zum Beweis der Unverbesserbarkeit des Terms $o(N^{-1})$ in (7,1). Wir können die Behauptung auch in die Form setzen: Es sei G_N eine gegen unendlich strebende Zahlenfolge. Dann gibt es stets ein $f \in [0, \pi]$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$, für das

$$\overline{\lim_{N \to \infty}}\, N\, G_N\, (E_N^{\mathscr{H}}[f] - E_M^{\mathscr{G}}[f]) > 0 \tag{7,10}$$

ist.

Man setzt an

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu\, g_{N_\nu} \tag{7,11}$$

Dabei ist N_ν eine wachsende Folge natürlicher Zahlen, von der wir einstweilen nur fordern

$$N_j > 2\, N_{j-1} \qquad N_1 > 2\, N_0\,. \tag{7,12}$$

Die $\varkappa_\nu$ werden rekursiv definiert durch

$$\varkappa_\nu = \frac{c_1}{6}\,\frac{\varkappa_{\nu-1}}{N_{\nu-1}} \qquad \varkappa_1 = 1\,, \tag{7,13}$$

c_1 und N_0 sind die Konstanten aus Lemma 8. Aus (7,12) und (7,13) folgt

$$\frac{\varkappa_{\nu+1}}{\varkappa_\nu} = \frac{c_1}{6}\,\frac{1}{N_\nu} < \frac{c_1}{6}\,\frac{1}{2^\nu}$$

also konvergiert (7,11) gleichmäßig und es gilt für $j > j_0$

$$\sum_{\nu > j} \varkappa_\nu \leq 2\, \varkappa_{j+1}\,.$$

Offenbar ist

$$E_{N_j}^{\mathscr{G}}[f] \leq \sum_{\nu > j} \varkappa_\nu \leq 2\, \varkappa_{j+1} = \frac{1}{3}\, c_1\, \frac{\varkappa_j}{N_j} \qquad j > j_0\,.$$

Unter Benutzung von (7,5) und Lemma 8 erhält man

$$\begin{aligned} E_{N_j}^{\mathscr{H}}[f] &\geq E_{N_j}^{\mathscr{H}}[\varkappa_j\, g_{N_j}] - \sum_{\nu > j} \varkappa_\nu\, E_{N_j}^{\mathscr{H}}[g_{N_\nu}] \\ &\quad - E_{N_j}^{\mathscr{H}}\Big[\sum_{\nu > j} \varkappa_\nu\, g_{N_\nu}\Big] \\ &\geq \varkappa_j\, \frac{c_1}{N_j} - \frac{\text{const}}{N_j^{3,5}} \sum_{\nu < j} \varkappa_\nu\, N_\nu - \sum_{\nu > j} \varkappa_\nu \\ &\geq \varkappa_j\, \frac{c_1}{N_j} - \frac{1}{3}\, c_1\, \frac{\varkappa_j}{N_j} - \frac{1}{N_j^{2,5}}\, \text{const} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu\,. \end{aligned}$$

Also

$$N_j G_{N_j} (E^{\mathscr{H}}_{N_j} [f] - E^{\mathscr{G}}_{N_j} [f]) \geq \varkappa_j G_{N_j} \left(\frac{1}{3} c_1 - \frac{\text{const}}{N_j^{1,5} \varkappa_j} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu\right).$$

Nun werden die N_j folgendermaßen rekursiv festgelegt:
Wenn schon $\varkappa_{j-1}$ und N_{j-1} bestimmt sind, dann erhält man $\varkappa_j$ durch (7,13) und anschließend wähle man N_j so groß, daß sowohl (7,12) erfüllt ist, als auch

$$\varkappa_j G_{Nj} > 1$$

und

$$\frac{\text{const}}{N_j^{1,5} \varkappa_j} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varkappa_\nu < \frac{1}{6} c_1 .$$

Es ist klar, daß eine solche Wahl möglich ist. Damit ist (7,10) bewiesen, und der Beweis von Satz 9 beendet.

§ 8. Die zweite Abschätzungsmethode

Satz 10: $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ und $\mathscr{H} = \{h_1, h_2, \ldots\}$ seien Systeme vom *Bessel*schen Typ im Raum B. Ferner seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

(i) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \| g_\nu - h_\nu \|^2 < \infty \tag{8,1}$$

(ii) Für alle $f \in B$ gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [g_\nu^* (f)\, g_\nu - h_\nu^* (f)\, h_\nu] = 0 \tag{8,2}$$

g_ν^* bzw. h_ν^* bedeuten hier die zu den g_ν bzw. h_ν gehörenden linearen Funktionale.

Dann gilt: Es gibt eine nur von $\mathscr{G}$ und $\mathscr{H}$ abhängende Zahl C derart, daß

$$\begin{aligned} E^{\mathscr{H}}_N [f] \leq C \left(1 + \left[\sum_{\nu=1}^{N} (E^{\mathscr{H}}_N [g_\nu])^2\right]^{\frac{1}{2}}\right) E^{\mathscr{G}}_N [f] \\ + \left\| \sum_{\nu > N} (g_\nu^* (f) - h_\nu^* (f))\, h_\nu \right\| \end{aligned} \tag{8,3}$$

ist.

Beweis: Man beginnt die Abschätzung wie beim Beweis von Satz 1 (mit $M = N$) und erhält

$$\begin{aligned} E^{\mathscr{H}}_N [f] \leq E^{\mathscr{G}}_N [f] + \sum_{\nu=1}^{N} | g_\nu^* (\mathrm{ba}^{\mathscr{G}}_N [f] - f) |\, E^{\mathscr{H}}_N [g_\nu] \\ + E^{\mathscr{H}}_N \left(\sum_{\nu=1}^{N} g_\nu^* (f)\, g_\nu\right) \end{aligned} \tag{8,4}$$

Beim zweiten Summanden benutzt man die *Cauchy-Schwarz*sche Ungleichung sowie die Voraussetzung, daß $\mathcal{G}$ vom *Bessel*schen Typ ist und erhält

$$\sum_{\nu=1}^{N} | g_\nu^* (\mathrm{ba}_N^{\mathcal{G}} [f] - f) | \, E_N^{\mathcal{H}} [g_\nu] \le c_1 \, E_N^{\mathcal{G}} [f] \left[\sum_{\nu=1}^{N} (E_N^{\mathcal{H}} [g_\nu])^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8,5}$$

Mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnen wir in diesem Abschnitt Zahlen, die nur von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ abhängen. Zur Abschätzung des dritten Summanden in (8,4) führt man die Abkürzungen $g_\nu^* (f) = a_\nu$, $h_\nu^* (f) = b_\nu$ ein und hat unter Berücksichtigung von (8,1), (8,2) und (2,9)

$$\begin{aligned} E_N^{\mathcal{H}} \left[\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu g_\nu \right] &= E_N^{\mathcal{H}} \left[\sum_{\nu=1}^{N} (a_\nu g_\nu - b_\nu h_\nu) \right] \\ &= E_N^{\mathcal{H}} \left[\sum_{\nu > N} (a_\nu g_\nu - b_\nu h_\nu) \right] \le \| \sum_{\nu > N} (a_\nu g_\nu - b_\nu h_\nu) \| \\ &\le \| \sum_{\nu > N} a_\nu (g_\nu - h_\nu) \| + \| \sum_{\nu > N} (a_\nu - b_\nu) h_\nu \| \\ &\le \left[\sum_{\nu > N} a_\nu^2 \sum_{\nu > N} \| g_\nu - h_\nu \|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \| \sum_{\nu > N} (a_\nu - b_\nu) h_\nu \| \\ &\le c_2 \, E_N^{\mathcal{G}} [f] + \| \sum_{\nu > N} (a_\nu - b_\nu) h_\nu \| . \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis und (8,5) in (8,4) ein, so erhält man die Behauptung.

Satz 10 soll nun herangezogen werden, um Aussagen über die Approximation durch Eigenfunktionen zu gewinnen. Als B liege für alles Folgende der Raum $C\,[0,1]$ zugrunde.

Für $\mathcal{H}$ werde — genau wie in § 5 — das System der nach wachsenden Eigenwerten geordneten Eigenfunktionen einer selbstadjungierten regulären Eigenwertaufgabe $(2\,n)$-ter Ordnung gewählt, für $\mathcal{G}$ das entsprechende System der zugehörigen reduzierten Aufgabe. Wie früher werde vorausgesetzt, daß $\mathcal{G}$ gleichmäßig beschränkt ist:

$$\sup_\nu \| g_\nu \| = G < \infty . \tag{8,6}$$

Gegenüber § 5 kommt die folgende Voraussetzung hinzu: Es gibt eine Zahl c_3 derart, daß

$$\| g_\nu - h_\nu \| \le c_3 \, \nu^{-1} \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{8,7}$$

gilt.

Die Voraussetzungen von Satz 10 sind nun erfüllt:

(i) wegen (8,7),

(ii) wegen des in § 2 zitierten *Stone*schen Satzes.

Da

$$E_N^{\mathcal{H}} [g_\nu] \le \| g_\nu - h_\nu \| \le c_3 \, \nu^{-1} \quad 1 \le \nu \le N$$

ist, hat man sogleich

$$\sum_{\nu=1}^{N} (E_N^{\mathscr{H}} [g_\nu])^2 \leq c_4 ,$$

und da wegen (8,6) und (8,7) auch $\mathscr{H}$ gleichmäßig beschränkt ist, bleibt zur Anwendung von Satz 10 nur die Reihe

$$\sum_{\nu > N} | (f, g_\nu - h_\nu) |$$

zu untersuchen.

Für die Eigenwertaufgaben, die $\mathscr{G}$ und $\mathscr{H}$ definieren, benutzen wir die Bezeichnungen aus § 2. Außerdem machen wir noch von den Operatoren $D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ und $L_1 \equiv L - D^{2n}$ Gebrauch. Schließlich sei noch darin erinnert, daß wir die Eigenwerte der ursprünglichen Aufgabe mit λ_ν, die der reduzierten Aufgabe mit ϱ_ν bezeichnen.

Es sei $f \in C^r [0,1]$ $(r \geq 1)$, und es gelte

$$f^{(\nu)} (0) = f^{(\nu)} (1) = 0 \quad \nu = 0, 1, \ldots r - 1$$

Über den Operator L machen wir die folgende **Voraussetzung** $\mathscr{L}_r$:

Ist $r \geq 2n$, so sei $D^{\mu+r-2n}\, l_\mu$ von beschränkter Schwankung. Ist $r < 2n$, so sei $D^\mu\, l_\mu$ von beschränkter Schwankung.

Wir definieren zwei ganze Zahlen p und q durch $r = 2np - q$, $0 \leq q < 2n$. Nun ist für genügend großes ν

$$\begin{aligned}
(f, h_\nu - g_\nu) &= \lambda_\nu^{-p} (f, L^p h_\nu) - \varrho_\nu^{-p} (f, D^{2np} g_\nu) \\
&= \lambda_\nu^{-p} (L^{p-1} f\,,\ L h_\nu) - \varrho_\nu^{-p} (D^r f\,,\ D^q g_\nu) \\
&= \lambda_\nu^{-p} (L^{p-1} f\,,\ D^{2n} h_\nu) + \lambda_\nu^{-p} (L^{p-1} f\,,\ L_1 h_\nu) \\
&\quad - \varrho_\nu^{-p} (D^r f\,,\ D^q g_\nu) \\
&= \lambda_\nu^{-p} (D^{2n-q} L^{p-1} f\,,\ D^q h_\nu) - \varrho_\nu^{-p} (D^r f\,,\ D^q g_\nu) \\
&\quad + \lambda_\nu^{-p} (L^{p-1} f\,,\ L_1 h_\nu) \\
&= \lambda_\nu^{-p} (D^r f\,,\ D^q (h_\nu - g_\nu)) \\
&\quad + (\lambda_\nu^{-p} - \varrho_\nu^{-p}) (D^r f\,,\ D^q g_\nu) \\
&\quad + \lambda_\nu^{-p} ((D^{2n-q} L^{p-1} f - D^r f)\,,\ D^q h_\nu) \\
&\quad + \lambda_\nu^{-p} (L^{p-1} f\,,\ L_1 h_\nu)
\end{aligned} \tag{8,8}$$

In dieser Form soll $(f, h_\nu - g_\nu)$ abgeschätzt werden. Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze.

Lemma 9: Es ist

$$| \lambda_\nu - \varrho_\nu | \leq c_5 \, \nu^{2n-2}$$

Beweis: Ungleichung (5,2) besagt hier

$$| \lambda_\nu - \varrho_\nu | \, | (h_\nu, g_\nu) | \leq R_{\nu\nu} + | (L_1 h_\nu, g_\nu) |$$

Man beachtet, daß $(h_\nu, g_\nu) = 1 - \frac{1}{2}(h_\nu - g_\nu, h_\nu - g_\nu) = 1 + o(1)$ ist und geht im übrigen vor wie beim Beweis von Lemma 5.

Lemma 10: Es gilt

$$|| D^\varkappa h_\nu - D^\varkappa g_\nu || \leq c_6 \, \nu^{\varkappa - 1} \quad \varkappa = 0, 1, \ldots 2n .$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} D^{2n}(g_\nu - h_\nu) &= \varrho_\nu g_\nu - \lambda_\nu h_\nu + L_1 h_\nu \\ &= \varrho_\nu (g_\nu - h_\nu) + (\varrho_\nu - \lambda_\nu) h_\nu + L_1 h_\nu , \end{aligned}$$

also, auf Grund von (8,7), (2,14), Lemma 9 und Lemma 4

$$\begin{aligned} || D^{2n}(g_\nu - h_\nu) || &\leq c_7 \, \nu^{2n} \, || g_\nu - h_\nu || + c_8 \, \nu^{2n-2} + c_9 \, \nu^{2n-2} \\ &\leq c_{10} \, \nu^{2n-1} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 3 folgt hieraus sofort die Behauptung.

Nun können wir die einzelnen Summanden in (8,8) abschätzen. Dabei verwenden wir (2,14) und die Lemmata 2, 4, 9, 10. Beim ersten Summanden erhält man ohne Schwierigkeit

$$| \lambda_\nu^{-p} (D^r f, D^q (h_\nu - g_\nu)) | \leq c_{11} \, || D^r f || \, \nu^{-r-1} .$$

Beim zweiten ist

$$\begin{aligned} | \lambda_\nu^{-p} - \varrho_\nu^{-p} | \, | (D^r f, D^q g_\nu) | &\leq \frac{| \lambda_\nu^p - \varrho_\nu^p |}{\lambda_\nu^p \, \varrho_\nu^p} \, | (D^r f, D^q g_\nu) | \\ &\leq \frac{p \, | \lambda_\nu - \varrho_\nu | \, [\max (| \lambda_\nu |, | \varrho_\nu |)]^{p-1}}{| \lambda_\nu^p \, \varrho_\nu^p |} \, | (D^r f, D^q g_\nu) | \\ &\leq c_{12}^{(r)} \, || D^r f || \, \nu^{-r-2} . \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung des dritten Summanden beachten wir, daß $(D^{2n-q} L^{p-1} - D^r) f$ von beschränkter Schwankung ist. Wendet man den zweiten Mittelwertsatz an und berücksichtigt, daß

$$\left| \int_a^b h_\nu^{(q)}(x) \, dx \right| \leq c_{13} \, \nu^{q-1} \quad q = 0, 1, \ldots 2n - 1$$

ist, dann erhält man

$$\begin{aligned}
&| \lambda_\nu^{-p} | \, | ((D^{2n-q} L^{p-1} - D^r) f, D^q h_\nu) | \\
&\leq | \lambda_\nu^{-p} | \, 4 \, c_{13} \, \nu^{q-1} (\mathrm{Var} \, [(D^{2n-q} L^{p-1} - D^r) f] + \| (D^{2n-q} L^{p-1} - D^r) f \|) \\
&\leq c_{14}^{(r)} \nu^{-r-1} \{ \| D^r f \| + \| D^{r-1} f \| + \ldots + \| D f \| + \| f \| \} \\
&\leq c_{15}^{(r)} \nu^{-r-1} \{ \| D^r f \| + \| f \| \} \, .
\end{aligned}$$

Zur Abschätzung des vierten Summanden spaltet man $L_1 h_\nu$ auf und hat dann also Ausdrücke der Form

$$(L^{p-1} f, D^\mu (l_\mu D^\mu h_\nu)) \quad \mu = 0, 1, \ldots n - 1$$

abzuschätzen. Man benutzt hier die Abschätzungsmethode des dritten Summanden, nachdem man vorher passend oft partiell integriert hat. Nach einigen Fallunterscheidungen erhält man auch hier

$$| \lambda_\nu^{-p} | \, | (L^{p-1} f, L_1 h_\nu) | \leq c_{16}^{(r)} (\| D^r f \| + \| f \|) \, \nu^{-r-1} \, .$$

Faßt man alles zusammen, dann ist also bewiesen

$$| (f, h_\nu - g_\nu) | \leq c_{17}^{(r)} (\| D^r f \| + \| f \|) \, \nu^{-r-1} \, ,$$

also wird

$$\sum_{\nu > N} | (f, h_\nu) - (f, g_\nu) | \leq c_{18}^{(r)} (\| D^r f \| + \| f \|) \, N^{-r}$$

Es ist somit bisher bewiesen: Wenn L der Voraussetzung $\mathscr{L}_r$ genügt, (8,6) und (8,7) gelten und

$$f^{(\nu)} (0) = f^{(\nu)} (1) = 0 \quad \nu = 0, 1, \ldots, r - 1 \tag{8,9}$$

ist, dann gilt

$$E_N^{\mathscr{H}} [f] \leq c_{19}^{(r)} \left(E_N^{\mathscr{G}} [f] + \frac{\| f^{(r)} \| + \| f \|}{N^r} \right) .$$

Bei den Anwendungen, die hiervon gemacht werden sollen, ist stets

$$E_N^{\mathscr{G}} [f] \leq c_{20}^{(r)} \frac{\| f^{(r)} \| + \| f \|}{N^r} \, . \tag{8,10}$$

Also hat man

$$E_N^{\mathscr{H}} [f] \leq c_{21}^{(r)} \frac{\| f^{(r)} \| + \| f \|}{N^r} \, . \tag{8,11}$$

Zur weiteren Abschätzung benötigt man das folgende Lemma, dessen Beweis wir an den Schluß dieses Abschnittes verschieben:

Lemma 11: Es sei $f \in C^l\,[0,1]$ eine Funktion, die (8,9) genügt $(r - 1 \leq l)$.

Dann gibt es trigonometrische Ausdrücke

$$T_N(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \cos 2\nu\pi x + b_\nu \sin 2\nu\pi x$$

mit

$$\| f - T_N \| \leq C^{(l)} \frac{\omega(f^{(l)}; N^{-1})}{N^l} \qquad N = r+1, \dots \tag{8,12}$$

und

$$T_N^{(\nu)}(0) = T_N^{(\nu)}(1) = 0 \quad \nu = 0, 1, \dots r-1 .$$

Hier ist $C^{(l)}$ eine Zahl, die nur von l abhängt.

Um das Lemma nutzbar zu machen, gehen wir aus von einem $f \in C^{r-1}\,[0,1]$, das (8,9) genügt und ordnen ihm das zugehörige T_N (mit $l = r - 1$) zu.

Es ist

$$\begin{aligned} E_N^{\mathscr{H}}[f] &\leq E_N^{\mathscr{H}}[f - T_N] + E_N^{\mathscr{H}}[T_N] \\ &\leq \| f - T_N \| + c_{21}^{(r)} \frac{\| T_N^{(r)} \| + \| T_N \|}{N^r} \qquad (8,13) \\ &\leq 2\, C^{(r-1)} \frac{\omega(f^{(r-1)}; N^{-1})}{N^{r-1}} + c_{21}^{(r)} \frac{\| T_N^{(r)} \| + \| f \|}{N^r} \end{aligned}$$

Nun gilt nach *Stečkin* ([14] p. 214) für jeden trigonometrischen Ausdruck $T_N(x)$

$$\| T_N^{(r)} \| \leq \gamma_r N^r \omega_r (T_N; N^{-1}) \quad r = 1, 2, \dots$$

Hier hängt γ_r nur von r ab und ω_r ist der r-te Stetigkeitsmodul (siehe dazu [14] p. 102ff.). Mit Hilfe dieser Ungleichung und (8,12) folgt

$$\begin{aligned} \| T_N^{(r)} \| &\leq \gamma_r N^r \omega_r (T_N; N^{-1}) \\ &\leq \gamma_r N^r \omega_r (T_N - f; N^{-1}) + \gamma_r N^r \omega_r (f; N^{-1}) \\ &\leq \gamma_r N^r 2^r \| T_N - f \| + \gamma_r N^r \frac{\omega(f^{(r-1)}; N^{-1})}{N^{r-1}} \\ &\leq (\gamma_r 2^r C^{(r-1)} + \gamma_r) N \omega(f^{(r-1)}; N^{-1}) . \end{aligned}$$

Setzt man das in (8,13) ein, dann erhält man unser Schlußresultat

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq c_{22}^{(r)} \left(\frac{\omega(f^{(r-1)}; N^{-1})}{N^{r-1}} + \frac{\| f \|}{N^r} \right). \tag{8,14}$$

Wir wollen das Ergebnis festhalten als

Satz 11: $\mathscr{G}$ und $\mathscr{H}$ mögen die früher angegebene Bedeutung haben. L genüge der Voraussetzung $\mathscr{L}_r$. (8,6) und (8,7) seien erfüllt. Für jedes $f \in C^r [0,1]$ mit (8,9) gelte (8,10).

Dann gilt (8,14) für jedes $f \in C^{r-1} [0,1]$, das (8,9) erfüllt.

Wir haben noch den Beweis von Lemma 11 nachzutragen. Er wird geführt durch vollständige Induktion nach r. Sei zunächst $r = 1$. Aus dem in der Einleitung genannten *Jackson*schen Satz folgt die Existenz eines trigonometrischen Ausdrucks $\widetilde{T}_N$ mit

$$\| f - \widetilde{T}_N \| \leq \widetilde{C}^{(l)} \frac{\omega\,(f^{(l)};\, N^{-1})}{N^l}\,.$$

Da $f(0) = f(1) = 0$ ist, muß

$$| \widetilde{T}_N (0) | = | \widetilde{T}_N (1) | \leq \widetilde{C}^{(l)} \frac{\omega\,(f^{(l)};\, N^{-1})}{N^l}$$

sein, d. h.

$$T_N (x) = \widetilde{T}_N (x) - \widetilde{T}_N (0)$$

leistet das Gewünschte.

Es sei die Behauptung schon bewiesen für $r = r_0 - 1$. Es gibt also zu einem $f \in C^l [0,1]$ $(l \geq r_0)$ mit

$$f^{(\nu)} (0) = f^{(\nu)} (1) = 0 \quad \nu = 0, 1, \ldots, r_0$$

ein $\widetilde{T}_N$ mit

$$\| f - \widetilde{T}_N \| \leq C^{(l)}_{r_0 - 1} \frac{\omega\,(f^{(l)};\, N^{-1})}{N^l} \tag{8,15}$$

und

$$\widetilde{T}_N^{(\nu)} (0) = \widetilde{T}_N^{(\nu)} (1) = 0 \quad \nu = 0, 1, \ldots r_0 - 1\,.$$

Gelingt es nun, einen trigonometrischen Ausdruck S_N zu konstruieren, der

$$\| S_N \| \leq \widetilde{C}^{(l)}_{r_0} \frac{\omega\,(f^{(l)};\, N^{-1})}{N^l} \tag{8,16}$$

und

$$S_N^{(\nu)} (0) = \delta_{\nu r_0}\, \widetilde{T}_N^{(\nu)} (0) \quad \nu = 0, 1, \ldots, r_0 \tag{8,17}$$

$$(\textit{Kronecker} - \delta)$$

erfüllt, dann kann man $T_N (x) = \widetilde{T}_N (x) - S_N (x)$ setzen und hat den Induktionsschritt vollzogen. (Es ist

$$C^{(l)}_{r_0} = C^{(l)}_{r_0 - 1} + \widetilde{C}^{(l)}_{r_0}\,;\; C^{(l)} = \max_{r < l} C^{(l)}_r)$$

Man setzt S_N an in der Form

$$S_N(x) = U_{r_0}\left(\left[\frac{N}{r_0}\right]x\right)\frac{\tilde{T}_N^{(r_0)}(0)}{\left[\frac{N}{r_0}\right]^{r_0}}$$

wo $U_{r_0}(x)$ einen trigonometrischen Ausdruck r_0-ter Ordnung mit

$$U_{r_0}^{(\nu)}(0) = \delta_{r_0\nu} \quad \nu = 0, 1, \dots r_0$$

bedeutet. Es genügt, die Existenz eines solchen U_{r_0} nur für gerades $r_0 = 2s$ zu beweisen, da der Beweis für ungerades r_0 ganz ähnlich ist. Man setzt

$$U_{r_0}(x) = a_0 + a_1 \cos 2\pi x + a_2 \cos 4\pi x + \dots + a_s \cos 2s\pi x\,.$$

Damit ist $U_{r_0}{}^{(2\nu+1)}(0) = 0$ erfüllt. Um auch $U_{r_0}^{(2\nu)}(0) = \delta_{\nu s}$ $(\nu = 0, 1, \dots s)$ durch passende Wahl der a_μ zu erfüllen, hat man ein lineares Gleichungssystem zu lösen, dessen Determinante eine *Vandermonde*sche, also $\neq 0$, ist. Es ist also (8,17) erfüllt. Um zu zeigen, daß auch (8,16) gilt, hat man

$$|\tilde{T}_N^{(r_0)}(0)| \leq \tilde{\tilde{C}}_{r_0}^{(l)}\frac{\omega(f^{(l)}; N^{-1})}{N^{l-r_0}}$$

nachzuweisen, und diese Beziehung folgt sicher aus

$$\| f^{(r_0)} - \tilde{T}_N^{(r_0)} \| \leq \tilde{\tilde{C}}_{r_0}^{(l)}\frac{\omega(f^{(l)}; N^{-1})}{N^{l-r_0}}\,.$$

Diese letzte Ungleichung kann man aber mit Hilfe einer Schlußweise von *Freud* ([14] p. 545) aus (8,15) folgern.

§ 9. Anwendung von Satz 11 auf Aufgaben zweiter Ordnung

Wir spezialisieren jetzt das Ergebnis des vorigen Abschnittes auf Eigenwertaufgaben zweiter Ordnung. Die Anwendung von Satz 11 erfordert den Nachweis von (8,7) und (8,10). Gehören die reduzierten Randbedingungen zu den Typen I, II, IIIb oder IIIc (Bezeichnungen aus § 6), dann folgert man (8,10) aus dem klassischen *Jackson*schen Satz über trigonometrische Approximation durch einfache Symmetrieüberlegungen. Bei Typ IIIa benutzt man die in § 6 auseinandergesetzte Methode; man kann z. B.

$$d_{N\nu} = 1 - \left(\frac{\nu}{N}\right)^{r+1}$$

wählen.

Die Gültigkeit von (8,7) für Aufgaben, deren reduzierte Randbedingungen den Typen I, II, IIIa angehören, ist von *Zaanen* [17] nachgewiesen worden*).

*) *Zaanen* setzt bei Typ IIIa $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ voraus. $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ führt auf *Sturm*sche Randbedingungen, für die die Gültigkeit von (8,7) schon lange bekannt ist (z. B. [18] p. 136ff.).

Zaanens Ergebnisse für Typ IIIb und IIIc können wir aber nicht verwenden, da sie gewisse Einschränkungen von $l(x)$ fordern.

Wir beweisen (8,7) nur für Typ IIIb, für IIIc geht alles ganz ähnlich.

Es ist bekannt (z. B. [17] p. 260), daß für die zum Eigenwert λ gehörende normierte Eigenfunktion h gilt.

$$h(x) = \sqrt{2} \cos(\sqrt{-\lambda}\, x - \tau) + O((-\lambda)^{-\frac{1}{2}})$$

$$h'(x) = -\sqrt{-2\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}\, x - \tau) + O(1),$$

wo $\lambda < 0$ vorausgesetzt ist und τ passend bestimmt werden kann.

Nun gibt es nach *Birkhoff-Tamarkine* ([12] p. 57ff.) zu jeder genügend großen natürlichen Zahl ν zwei Eigenwerte $\lambda_{2\nu+1}, \lambda_{2\nu}$ (die zu einem doppelten zusammenfallen können) mit

$$\sqrt{-\lambda_{2\nu+1}} = 2\nu\pi + \varepsilon_{2\nu+1}, \quad \sqrt{-\lambda_{2\nu}} = 2\nu\pi + \varepsilon_{2\nu}$$

$$\varepsilon_\nu = O(\nu^{-\frac{1}{2}}).$$

Also ist

$$h_{2\nu}(x) = \sqrt{2} \cos(2\nu\pi x + \varepsilon_{2\nu} x - \tau_{2\nu}) + O(\nu^{-1}) \tag{9,1}$$

$$h_{2\nu}(x) = -\sqrt{2}\, 2\nu\pi \sin(2\nu\pi x + \varepsilon_{2\nu} x - \tau_{2\nu}) + O(1)$$

und ähnlich für $h_{2\nu+1}(x)$. Die Numerierung ist hier als vorläufige zu verstehen, es ist nämlich noch nicht bewiesen, daß $h_{2\nu}$ die 2ν-te Eigenfunktion ist. Setzt man die Ausdrücke (9,1) in die Randbedingungen ein, dann erhält man

$$\cos(\varepsilon_{2\nu} - \tau_{2\nu}) = \cos\tau_{2\nu} + O(\nu^{-1})$$

$$\sin(\varepsilon_{2\nu} - \tau_{2\nu}) = -\sin\tau_{2\nu} + O(\nu^{-1})$$

oder

$$\cos\tau_{2\nu}(\cos\varepsilon_{2\nu} - 1) + \sin\varepsilon_{2\nu}\sin\tau_{2\nu} = O(\nu^{-1})$$

$$-\sin\tau_{2\nu}(\cos\varepsilon_{2\nu} - 1) + \sin\varepsilon_{2\nu}\cos\tau_{2\nu} = O(\nu^{-1})$$

woraus man wegen $\cos\varepsilon_{2\nu} - 1 = -2\sin^2\frac{\varepsilon_\nu}{2} = O(\nu^{-1})$

$$\sin\varepsilon_{2\nu}\sin\tau_{2\nu} = O(\nu^{-1}), \quad \sin\varepsilon_{2\nu}\cos\tau_{2\nu} = O(\nu^{-1})$$

folgert. Durch Quadrieren und Addieren erhält man $\varepsilon_{2\nu} = O(\nu^{-1})$, so findet man als asymptotische Ausdrücke

$$h_{2\nu+1}(x) = \sqrt{2}\cos(2\nu\pi x - \tau_{2\nu+1}) + O(\nu^{-1})$$

$$h_{2\nu}(x) = \sqrt{2}\cos(2\nu\pi x - \tau_{2\nu}) + O(\nu^{-1})$$

Aus der Bedingung $(h_{2\nu+1}, h_{2\nu}) = 0$ erhält man sofort $\cos(\tau_{2\nu} - \tau_{2\nu+1}) = O(\nu^{-1})$, d. h. bei passender Anordnung gilt

$$\tau_{2\nu} \equiv \tau_{2\nu+1} + \frac{\pi}{2} + O(\nu^{-1}) \bmod (2\pi) .$$

Setzt man nun

$$\tilde{\tau}_{2\nu} = \tau_{2\nu+1} + \frac{\pi}{2} \qquad \tilde{\tau}_{2\nu+1} = \tau_{2\nu+1}$$

$$g_{2\nu+1}(x) = \sqrt{2}\cos(2\nu\pi x - \tilde{\tau}_{2\nu+1}) \tag{9,2}$$

$$g_{2\nu}(x) = \sqrt{2}\cos(2\nu\pi x - \tilde{\tau}_{2\nu})$$

$$g_1(x) = 1$$

dann hat man in diesen Funktionen ein Orthonormalsystem von Lösungen der reduzierten Aufgabe, für das gilt

$$\| g_\nu - h_\nu \| = O(\nu^{-1}) . \tag{9,3}$$

Um zu zeigen, daß die Numerierung der h_ν richtig ist, ziehen wir den folgenden Satz von *Bary* ([19] p. 303) heran: Sind $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ und $\mathscr{H} = \{h_1, h_2, \ldots\}$ Orthonormalsysteme und gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (g_\nu - h_\nu, g_\nu - h_\nu) < \infty , \tag{9,4}$$

dann folgt aus der Vollständigkeit von $\mathscr{H}$ die Vollständigkeit von $\mathscr{G}$.

In unserem Fall ist wegen (9,3) offensichtlich (9,4) erfüllt.

Wäre nun etwa h_{ν_0} $(\nu_0 > 1)$ die erste Eigenfunktion, dann folgte also, daß $\mathscr{G}_0 = \{g_\nu \mid \nu \geq \nu_0\}$ vollständig wäre — Widerspruch. Gäbe es andererseits vor h_1 noch Eigenfunktionen, dann erhielte man einen ähnlichen Widerspruch. Es muß also h_1 die erste Eigenfunktion sein.

Damit ist (8,7) vollständig bewiesen.

Wir können also Satz 11 bei allen Typen anwenden und haben als Zwischenresultat:

L erfülle $\mathscr{L}_{r+1}$. Für jedes $f \in C^r[0,1]$ mit

$$f^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(1) = 0 \quad \nu = 0, 1, \ldots r \tag{9,5}$$

gilt

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq \tilde{C}\left[\frac{\omega(f^{(r)}; N^{-1})}{N^r}\right] + \frac{\| f \|}{N^{r+1}}$$

wo $\tilde{C}$ nur von $\mathscr{H}$ und r abhängt.

Wir wollen uns nun von der einschränkenden Voraussetzung (9,5) befreien. An ihre Stelle treten die folgenden „natürlichen" Randbedingungen:

Bedingung $\mathscr{F}_r$: Es sei $f \in C^r\,[0,1]$. Ist r ungerade, dann genüge f den Randbedingungen

$$U_1\,(L^\mu f) = U_2\,(L^\mu f) = 0;\ \mu = 0, 1, \ldots \left[\frac{r-1}{2}\right]$$

Ist r gerade, dann genüge f außer den eben genannten Bedingungen noch

$$U\,(L^{\frac{r}{2}} f) = 0\,,$$

wo für U die wesentlichen Randbedingungen zu setzen sind.

Daß wir die Voraussetzung (9,5) im Zwischenresultat durch die schwächere Voraussetzung $\mathscr{F}_r$ ersetzen dürfen, ist gerade das Hauptergebnis dieses Abschnittes. Genauer:

Satz 12: Es sei $\mathscr{H}$ das nach wachsenden Eigenwerten geordnete System der Eigenfunktionen der selbstadjungierten Eigenwertaufgabe

$$y''\,(x) + l\,(x)\,y\,(x) = \lambda\,y\,(x) \quad U_1\,[y] = U_2\,[y] = 0\,. \tag{9,6}$$

$l\,(x)$ habe eine $(r-1)$-te Ableitung von beschränkter Schwankung. (Im Fall $r = 0$: $l\,(x)$ sei stetig). Die Funktion f genüge der Bedingung $\mathscr{F}_r$. Dann gilt

$$E_N^{\mathscr{H}}\,[f] \leq \frac{C}{N^r}\left[\omega\,(f^{(r)};\ N^{-1}) + \frac{\|f\| + \|f^{(r)}\|}{N}\right],$$

wo C nur von $\mathscr{H}$ und r abhängt.

Der Spezialfall $r = 0$ dieses Satzes ist Satz 7 und somit schon bewiesen. (Wir erhalten diesen Spezialfall nicht durch die folgenden Betrachtungen, weil die Voraussetzung $\mathscr{L}_1$ fordert, daß $l\,(x)$ von beschränkter Schwankung ist.) Wir können somit $r \geq 1$ voraussetzen.

Beweis: f genüge $\mathscr{F}_r$. Man bestimmt Zahlen α_i derart, daß (mit einem m, das nur von $\mathscr{H}$ und r abhängt)

$$\tilde{f} = f - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,h_i$$

der Bedingung (9,5) genügt (Beweis für die Möglichkeit folgt), und wendet das oben genannte Zwischenresultat auf $\tilde{f}$ an.

Für $N \geq m$ hat man damit

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] = E_N^{\mathscr{H}}[\tilde{f}]$$

$$\leq \tilde{C}\left[\frac{\omega(\tilde{f}^{(r)}; N^{-1})}{N^r} + \frac{\|\tilde{f}\|}{N^{r+1}}\right]$$

$$\leq \tilde{C}\left[\frac{\omega(f^{(r)}; N^{-1})}{N^r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \, \|h_i^{(r+1)}\|}{N^{r+1}} + \frac{\|f\|}{N^{r+1}} + \frac{\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \, \|h_i\|}{N^{r+1}}\right]$$

Da die α_i Lösungen eines linearen Gleichungssystems sind, kann man sie als Linearkombinationen der $f^{(\nu)}(0)$, $f^{(\nu)}(1)$ $(\nu = 0, 1, \ldots r)$ darstellen, wobei die Koeffizienten nur von $\mathscr{H}$ und r abhängen. Somit erhält man schließlich, wenn man noch von Lemma 2 Gebrauch macht

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq C\left[\frac{\omega(f^{(r)}; N^{-1})}{N^r} + \frac{\|f^{(r)}\| + \|f\|}{N^{r+1}}\right].$$

Der noch fehlende Fall $N < m$ kann wegen

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] \leq \|f\|$$

durch Vergrößern von C erledigt werden.

Es bleibt noch zu zeigen, daß das Gleichungssystem

$$f^{(\mu)}(0) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i^{(\mu)}(0) \quad \mu = 0, 1, \ldots, r \tag{9,7}$$

$$f^{(\mu)}(1) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i^{(\mu)}(1) \quad \mu = 0, 1, \ldots, r$$

lösbar ist. Der Beweis hierfür soll zunächst für ungerades r gegeben werden. Wir schreiben das System jetzt in der Form

$$f^{(\mu)}(0) = \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_{\nu_i} h_{\nu_i}^{(\mu)}(0) \quad \mu = 0, 1, \ldots, r \tag{9,8}$$

$$f^{(\mu)}(1) = \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_{\nu_i} h_{\nu_i}^{(\mu)}(1) \quad \mu = 0, 1, \ldots, r$$

mit $1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{r+1} = m$, haben also einige der $\alpha_i = 0$ gesetzt. Nach einem bekannten Satz ist das System genau dann lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{M}$ und die um die linken Seiten erweiterte Matrix den gleichen Rang haben. Nun bestehen zwischen den $2r + 2$ Zeilen der erweiterten Matrix $r+1$ linear unabhängige Beziehungen. Denn die h_μ genügen den $r+1$ Bedingungen $\mathcal{F}_r$ ebenso wie f, und man überlegt sich leicht, daß diese Bedingungen untereinander linear unabhängig sind. Also hat die erweiterte Matrix höchstens den Rang $r+1$. Wenn man nun zeigen kann, daß bei passender Wahl der v_i $\mathfrak{M}$ den Rang $r+1$ hat, ist man fertig. Wenn man nochmals ausnützt, daß $U_{1,2}\,[L^\mu h_\nu] = 0$ ist, kann man aus $\mathfrak{M}$ $r+1$ Zeilen weglassen, ohne am Rang etwas zu ändern. Und zwar sind das die Zeilen mit Ableitungen gerader (ungerader) Ordnung, wenn die reduzierten Randbedingungen vom ersten (zweiten) Typ sind. Liegt der dritte Typ vor, dann hat man entweder die Zeilen mit $h_\nu^{(2\mu)}(0)$ und $h_\nu^{(2\mu+1)}(1)$ oder die Zeilen mit $h_\nu^{(2\mu)}(1)$ und $h_\nu^{(2\mu+1)}(0)$ wegzulassen. Man erhält in jedem Fall eine quadratische Matrix der Ordnung $r+1$. Ihre Spalten sehen — etwa bei Typ I — so aus:

$$\mathfrak{h}_\nu = (h_\nu'(0), h_\nu'''(0), \ldots h^{(r)}(0), h_\nu'(1), \ldots, h^{(r)}(1))' .$$

Spannt die Menge $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots$ einen Raum der Dimension $r+1$ auf, dann lassen sich die v_i so wählen, daß $\mathfrak{M}$ den Rang $r+1$ hat; im anderen Fall gibt es einen Vektor $\mathfrak{c} \neq 0$

$$\mathfrak{c} = (\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{\frac{r-1}{2}}, \gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{\frac{r-1}{2}}),$$

der zu dem aufgespannten Raum orthogonal ist; mit anderen Worten, es gilt eine Randbedingung

$$\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \beta_i h_\nu^{(2i+1)}(0) + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \gamma_i h_\nu^{(2i+1)}(1) = 0 \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} |\beta_i| + |\gamma_i| \neq 0 ,$$

wo β_i und γ_i von ν unabhängig sind. Bei Typ II erhält man

$$\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \beta_i h_\nu^{(2i)}(0) + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \gamma_i h_\nu^{(2i)}(1) = 0$$

bei Typ III

$$\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \beta_i h_\nu^{(2i+1)}(0) + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \gamma_i h_\nu^{(2i)}(1) = 0$$

bzw. die hieraus durch Vertauschung der Stellen 0 und 1 hervorgehende Gleichung. Wir haben zu zeigen, daß diese zusätzlichen Randbedingungen auf einen Widerspruch führen. Zu diesem Zweck setzt man die folgenden Gleichungen (und entsprechende für $x = 1$)

$$h_\nu^{(2i)}(0) = \lambda_\nu h_\nu(0) + O(\lambda_\nu^{i-1} h_\nu(0)) + O(\lambda_\nu^{i-2} h'_\nu(0))$$

$$h_\nu^{(2i+1)}(0) = \lambda_\nu^i h'_\nu(0) + O(\lambda_\nu^{i-1} h'_\nu(0)) + O(\lambda_\nu^{i-1} h_\nu(0))$$

die man leicht aus (9,6) herleitet, in die Randbedingungen ein. Wenn man nun die Beziehungen

$$h_\nu(x) = g_\nu(x) + O(\nu^{-1}); \; h'_\nu(x) = g'_\nu(x) + O(1)$$

verwendet, dann erhält man bei den Typen I, II, IIIa leicht einen Widerspruch. Bei den Typen IIIb und IIIc tritt noch eine kleine Schwierigkeit auf, weil die $\tilde{\tau}_\nu$ in (9,2) nicht bekannt sind. Eine genauere Betrachtung zeigt aber, daß schon die Beziehung $\tilde{\tau}_{2\nu} - \tilde{\tau}_{2\nu+1} = \frac{\pi}{2}$ zur Herleitung des gewünschten Widerspruchs ausreicht.

Damit ist die Lösbarkeit des Gleichungssystems (9,7) im Fall eines ungeraden r nachgewiesen.

Man kann die benutzte Methode leicht so modifizieren, daß sie auch für gerades r brauchbar wird. Im wesentlichen hat man nur in (9,8) die obere Summationsgrenze $r + 1$ durch $r + 2$ bzw. $r + 1$ bzw. r zu ersetzen, je nachdem keine bzw. eine bzw. zwei wesentliche Randbedingungen vorhanden sind.

Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen.

§ 10. Anwendung von Satz 11 auf Aufgaben mit periodischen Randbedingungen

L sei ein Differentialoperator der Ordnung $2n$ derart, daß er zusammen mit den Randbedingungen

$$y^{(\mu)}(0) = y^{(\mu)}(1) \quad \mu = 0, 1, \dots 2n-1$$

Anlaß zu einer selbstadjungierten Eigenwertaufgabe gibt.

Auf das zugehörige System $\mathcal{H}$ der Eigenfunktionen soll nun Satz 11 angewendet werden. Da (8,10) erfüllt ist, bleibt nur Richtigkeit von (8,7) nachzuweisen. Das soll jetzt geschehen.

Wir setzen

$$g_1(x) = 1 \quad g_{2\nu}(x) = \sqrt{2}\cos 2\nu\pi x \quad g_{2\nu+1}(x) = \sqrt{2}\sin 2\nu\pi x$$
$$\nu = 1, 2, \dots$$

Nach *Birkhoff-Tamarkine* ([12] p. 57) gibt es zu jeder genügend großen natürlichen Zahl ν zwei Eigenwerte $\lambda_{2\nu}$, $\lambda_{2\nu+1}$ (die zu einem doppelten zusammenfallen können) mit

$$\lambda_{2\nu} = (-1)^n (2\nu\pi)^{2n} [1 + O(\nu^{-3/2})]$$

$$\lambda_{2\nu+1} = (-1)^n (2\nu\pi)^{2n} [1 + O(\nu^{-3/2})] .$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen bezeichnen wir mit $h_{2\nu}$ und $h_{2\nu+1}$, ohne damit behaupten zu wollen, daß $h_{2\nu}$ gerade die (2ν)-te Eigenfunktion ist. Wir entwickeln die h_ν in eine *Fourier*sche Reihe und erhalten

$$\| h_{2\nu} - (g_{2\nu}, h_{2\nu})\, g_{2\nu} - (g_{2\nu+1}, h_{2\nu})\, g_{2\nu+1} \| \tag{10,1}$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{\mu=1}^{\infty}{}' | (g_\mu, h_{2\nu}) | .$$

$$\| h_{2\nu+1} - (g_{2\nu}, h_{2\nu+1})\, g_{2\nu} - (g_{2\nu+1}, h_{2\nu+1})\, g_{2\nu+1} \| \tag{10,2}$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{\mu=1}^{\infty}{}' | (g_\mu, h_{2\nu+1}) | ,$$

wobei der Akzent am Summenzeichen besagen soll, daß die Summanden mit $\mu = 2\nu$ und $\mu = 2\nu + 1$ auszulassen sind.

Zur Abschätzung der Reihen verwenden wir wieder die Methode aus § 5. (5,2) schreibt sich hier

$$| (g_\mu, h_\nu) | \leq \frac{| (L_1 h_\nu,\ g_\mu) |}{| \, | \varrho_\mu | - | \lambda_\nu | \, |}$$

mit

$$| \varrho_\mu | = \left(\left[\frac{\mu}{2} \right] 2\pi \right)^{2n} .$$

Unter Heranziehung der *Cauchy-Schwarz*schen Ungleichung, der *Bessel*schen Ungleichung bezüglich $\mathscr{G}$ und der asymptotischen Ausdrücke für λ_ν erhalten wir nach einigen Rechnungen (ähnlich wie in § 7), daß die rechten Seiten von (10,1) und (10,2) $O(\nu^{-1})$ sind.

Bildet man das innere Produkt der linken Seite von (10,2) mit sich selbst, dann erhält man

$$| 1 - (g_{2\nu}, h_{2\nu+1})^2 - (g_{2\nu+1}, h_{2\nu+1})^2 | = O(\nu^{-2}) . \tag{10,3}$$

Also ist für genügend großes ν entweder

$$| (g_{2\nu}, h_{2\nu+1}) | > \frac{1}{2} \text{ oder } | (g_{2\nu+1}, h_{2\nu+1}) | > \frac{1}{2} .$$

Wir nehmen der Bestimmtheit halber das erstere an. Dann können wir das folgende Orthogonalsystem bilden:

$$g_1^*(x) = 1$$

$$g_{2\nu}^* = \left[(h_{2\nu}, g_{2\nu}) + \frac{\alpha_\nu}{(g_{2\nu}, h_{2\nu+1})}\right] g_{2\nu} + (h_{2\nu}, g_{2\nu+1})\, g_{2\nu+1}$$

$$g_{2\nu+1}^* = (h_{2\nu+1}, g_{2\nu})\, g_{2\nu} + (h_{2\nu+1}, g_{2\nu+1})\, g_{2\nu+1}$$

mit

$$\alpha_\nu = -(h_{2\nu}, g_{2\nu})(h_{2\nu+1}, g_{2\nu}) - (h_{2\nu}, g_{2\nu+1})(h_{2\nu+1}, g_{2\nu+1}) .$$

Bildet man das innere Produkt der linken Seiten von (10,1) und (10,2), dann erhält man gerade α_ν und hat somit $\alpha_\nu = O(\nu^{-2})$ bewiesen. Also ist

$$\sup_{x \in [0,1]} |h_\nu(x) - g_\nu^*(x)| = O(\nu^{-1}) .$$

Zieht man nun die leicht zu verifizierende Beziehung

$$(g_\nu^*, g_\nu^*) = 1 + O(\nu^{-1})$$

heran, dann folgt sofort

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| h_\nu(x) - \frac{g_\nu^*(x)}{(g_\nu^*, g_\nu^*)^{1/2}} \right| = O(\nu^{-1}) .$$

Mit der schon früher benutzten Schlußweise, die sich auf den Satz von *Bary* stützt, zeigt man nun, daß die Numerierung der h_ν richtig ist und hat (8,7) bewiesen.

Wir wollen auch hier über das nach Satz 11 zu erreichende Resultat hinausgehen und beweisen

Satz 13: Voraussetzung: Es sei L ein Differentialoperator der Ordnung $2n$, der $\mathscr{L}_{r+1}$ genügt.

Zusammen mit den Randbedingungen

$$y^{(\mu)}(0) = y^{(\mu)}(1) \quad \mu = 0, 1, \dots 2n-1$$

gebe L Anlaß zu einer selbstadjungierten Eigenwertaufgabe. Das nach wachsenden Eigenwerten geordnete System der Eigenfunktionen dieser Aufgabe werde mit $\mathscr{H}$ bezeichnet.

Es sei $f \in C^r[0,1]$.

Die ganzen Zahlen p und q seien definiert durch

$$r = 2\,n\,p + q \quad 0 \leq q < 2\,n$$

f genüge den Randbedingungen

$$D^\nu L^\mu f\,|_{x=0} = D^\nu L^\mu f\,|_{x=1} \; \mu = 0, 1, \ldots, p-1$$

$$\nu = 0, 1, \ldots, 2\,n - 1$$

$$D^\nu L^p f\,|_{x=0} = D^\nu L^p f\,|_{x=1} \;\; \nu = 0, 1, \ldots, q$$

Behauptung: Es gilt

$$E_N^{\mathscr{K}}[f] \leq \frac{C}{N^r}\left[\omega\,(f^{(r)};\; N^{-1}) + \frac{\|f\| + \|f^{(r)}\|}{N}\right]$$

wo C nur von L und r abhängt.

Wir haben die Behauptung dieses Satzes bisher nur bewiesen für Funktionen f, die den speziellen Randbedingungen

$$f^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(1) = 0 \quad \nu = 0, 1, \ldots r$$

genügen. Die Einarbeitung der allgemeineren Bedingungen geschieht genau nach dem Muster des vorigen Abschnittes. Sie braucht daher nicht genauer auseinandergesetzt zu werden; wir erwähnen nur, daß man von den Formeln

$$h_\nu{}^{(i)}(0) = \lambda_\nu{}^p\, h_\nu{}^{(q)}(0) + O\,(\nu^{i-1}), \; (i = 2\,n\,p + q)$$

$$h_\nu{}^{(q)}(x) = (2\,\nu\,\pi)^q \cos\left(2\,\nu\,\pi\,x - q\frac{\pi}{2} - \tau_\nu\right) + O\,(\nu^{q-1})$$

Gebrauch macht und beachtet, daß $\tau_{2\nu} - \tau_{2\nu+1} = \frac{\pi}{2} + O\,(\nu^{-1})$ ist.

§ 11. Umkehrsätze

Wir wollen hier Umkehrsätze für die Approximation durch Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Eigenwertaufgabe zweiter Ordnung betrachten. Die Methoden und Ergebnisse lassen sich unschwer auf den in § 10 behandelten Fall übertragen.

Der Schlüssel zum Beweis der Umkehrsätze für die trigonometrische Approximation ist die *Bernstein*sche Ungleichung. Hat man ihr Analogon bewiesen, dann kann man große Teile der klassischen Beweise unverändert übernehmen.

Wir beweisen ihr Analogon zunächst für einen speziellen Fall:

Lemma 12: Es sei $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, \ldots\}$ das System der Eigenfunktionen einer reduzierten Aufgabe zweiter Ordnung. Es gilt

$$\| \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \, g_\nu^{(r)} \| \leq M^* \, N^r \, \| \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \, g_\nu \|; \quad r = 1, 2, \ldots \tag{11,1}$$

mit einem M^*, das nur von $\mathscr{G}$ und r abhängt.

(Normen sind in diesem Abschnitt stets als sup-Normen zu verstehen). Zum Beweise mustert man die verschiedenen Typen von reduzierten Aufgaben durch. Man stellt leicht fest, daß bei den Typen I, II, III b, III c die Behauptung ein Spezialfall der klassischen *Bernstein*schen Ungleichung ist.

Wir haben also nur noch den Fall III a zu erledigen. Mit einigen elementaren Rechnungen stellt man fest: Man kann die Summe

$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu \, g_\nu(x)$ für die wir jetzt $S_N(x)$ schreiben wollen, in die Form

$$S_N(x) = \cos(\sigma \pi x + \tau) \, T_1(x) + \sin(\sigma \pi x + \tau) \, T_2(x) \tag{11,2}$$

setzen, wo T_1 und T_2 trigonometrische Ausdrücke der Ordnung N sind.

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \operatorname{sgn}(\beta^2 - \alpha^2) \, [S_N(x) \sin(\sigma \pi - \sigma \pi x + \tau) + \\ &\quad + S_N(1 - x) \sin(\sigma \pi x + \tau)] \qquad (11,3) \\ T_2(x) &= \operatorname{sgn}(\beta^2 - \alpha^2) \, [S_N(x) \cos(\sigma \pi - \sigma \pi x + \tau) - S_N(1 - x) \cos(\sigma \pi x + \tau)]. \end{aligned}$$

Bildet man die r-te Ableitung von $S_N(x)$ in der Form (11,2), dann findet man mit Hilfe der *Bernstein*schen Ungleichung

$$\| S_N^{(r)} \| \leq \text{const} \, N^r (\| T_1 \| + \| T_2 \|),$$

und da aus (11,3) folgt

$$\| T_i \| \leq 2 \, \| S_N \| \quad i = 1, 2$$

erhält man sogleich das gewünschte Resultat.

Folgerung: Mit den Bezeichnungen aus Lemma 12 gilt

$$\| \sum_{\nu=2}^{N} \alpha_\nu \, g_\nu^{(r)} \| \leq M^* \, N^{r-p} \, \| \sum_{\nu=2}^{N} \alpha_\nu \, g_\nu^{(p)} \|. \tag{11,4}$$

Das folgt aus Lemma 12, wenn man beachtet, daß die $g_\nu^{(p)}$ für jedes p selbst Lösungen einer reduzierten Aufgabe sind.

Wir können nun als partiellen Ersatz für die *Bernstein*sche Ungleichung beweisen

Lemma 13: Es sei $\mathscr{H} = \{h_1, h_2, \ldots\}$ das System der Eigenfunktionen von (9,6). Die Funktion l in (9,6) habe eine $(r-2)$-te beschränkte und integrierbare Ableitung (bzw. sei stetig, wenn $r = 1$ oder $r = 2$ ist) p sei eine ganze Zahl mit $0 \leq p < r$. Dann gibt es Zahlen m und M, die nur von r, p und $\mathscr{H}$ abhängen derart, daß für jede Linearkombination

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu h_\nu \text{ und für jedes } N \text{ gilt}$$

$$\left\| \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu h_\nu^{(r)} \right\| \leq M N^{r-p} \left\| \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu h_\nu^{(p)} \right\| . \tag{11,5}$$

Ist $p = 0$, dann kann $m = 1$ gewählt werden.

Beweis: Mit einer leichten Verallgemeinerung der bei Lemma 10 benutzten Methode beweist man die Existenz eines c_r mit

$$\| g_\nu^{(r)} - h_\nu^{(r)} \| \leq c_r \nu^{r-1} .$$

Es folgt mit Verwendung von (11,4) bzw. (11,1)

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu h_\nu^{(r)} \right\| &\leq \left\| \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu g_\nu^{(r)} \right\| + c_r \sum_{\nu=m}^{N} |\alpha_\nu| \nu^{r-1} \\
&\leq M^* N^{r-p} \left\| \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu g_\nu^{(p)} \right\| + c_r N^{r-p} \sum_{\nu=m}^{N} |\alpha_\nu| \nu^{p-1} \qquad (11,6) \\
&\leq M^* N^{r-p} \left\| \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu h_\nu^{(p)} \right\| + N^{r-p} (M^* c_p + c_r) \sum_{\nu=m}^{N} |\alpha_\nu| \nu^{p-1} .
\end{aligned}$$

Ist $p = 0$, dann kann man den Beweis so zu Ende führen:

$$\sum_{\nu=1}^{N} |\alpha_\nu| \nu^{-1} \leq \left[\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2} \right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left[\left(\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu h_\nu, \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu h_\nu \right) \right]^{1/2} \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left\| \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu h_\nu \right\|$$

Ist $p \neq 0$, dann bilden die $h_\nu^{(p)}$ im allgemeinen kein Orthogonalsystem, und man kann diese Beweismethode nicht verwenden. Aber die Funktionen

$$\frac{g_\nu^{(p)}}{|\varrho_\nu|^{p/2}} \qquad \nu = 2, 3, \ldots$$

bilden ein Orthonormalsystem und das läßt sich folgendermaßen ausnützen: Wir setzen

$$d_p = \sup_{\nu > 1} \frac{\nu^{2p}}{|\varrho_\nu|^p}$$

und haben ($m > 1$ vorausgesetzt)

$$\sum_{\nu=m}^{N} |\alpha_\nu| \nu^{p-1} \leq [\sum_{\nu=m}^{\infty} \nu^{-2} \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu^2 \nu^{2p}]^{1/2}$$

$$\leq [d_p \sum_{\nu=m}^{\infty} \nu^{-2} \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu^2 |\varrho_\nu|^p]^{1/2} \leq [d_p \sum_{\nu=m}^{\infty} \nu^{-2}]^{1/2} || \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu g_\nu^{(p)} ||$$

$$\leq [d_p \sum_{\nu=m}^{\infty} \nu^{-2}]^{1/2} [|| \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu h_\nu^{(p)} || + c_p \sum_{\nu=m}^{N} |\alpha_\nu| \nu^{p-1}] .$$

Somit ist

$$(1 - c_p [d_p \sum_{\nu=m}^{\infty} \nu^{-2}]) \sum_{\nu=m}^{N} |\alpha_\nu| \nu^{p-1} \leq [d_p \sum_{\nu=m}^{N} \nu^{-2}] || \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu h_\nu^{(p)} || .$$

Wählt man nun m so groß, daß die linke Seite dieser Ungleichung positiv ist, dann hat man die gewünschte Abschätzung für

$$\sum_{\nu=m}^{N} |\alpha_\nu| \nu^{p-1} ,$$

die, in (11,6) eingesetzt, sofort zum Beweis des Lemmas führt.

In der Formulierung der Umkehrsätze folgen wir der klaren und eleganten Darstellung, die *Lorentz* ([2] p. 58—62) gegeben hat.

Wir können den Beweis seines Theorems 4 ([2] p. 59) fast wörtlich übernehmen, um zu zeigen:

Lemma 14: Es sei $\mathscr{U} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ ein System von Funktionen, $u_\nu \in C^1 [0,1]$.

Es gebe ein c mit

$$|| \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu u_\nu' || \leq c N || \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu u_\nu || .$$

Dann gibt es ein k derart, daß

$$\omega (f; \delta) \leq k \delta (\sum_{1 \leq \nu \leq \delta^{-1}} E_\nu^{\mathscr{U}} [f] + || f ||)$$

$$0 < \delta \leq 1$$

gilt.

Wegen Lemma 13 ($p = 0$) läßt sich hier $\mathscr{U} = \mathscr{H}$ wählen. Als ganz spezielle Folgerung heben wir hervor: Aus $E_\nu^{\mathscr{H}} [f] = O (\nu^{-\alpha})$ $(0 < \alpha < 1)$ folgt $\omega (f, \delta) = O (\delta^\alpha)$.

Indem wir den Beweis von *Lorentz*' Theorem 8 ([2] p. 61) nachahmen, erhalten wir

Satz 14: Die Funktion l in (9,6) habe eine $(r-2)$-te beschränkte und integrierbare Ableitung (bzw. sei stetig, wenn $r=1$ oder $r=2$ ist). Wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu^{\mathscr{H}}[f] < \infty \tag{11,7}$$

ist, dann genügt f der Bedingung $\mathscr{F}_r$.

Um zu weitergehenden Umkehrsätzen zu kommen, können wir die klassische Methode nicht direkt verwenden, weil für die $h_\nu^{(p)}$ keine Ungleichung vom *Bernstein*schen Typ gilt. (11,5) legt es nahe, zu einem Unterraum überzugehen, in dem eine solche gilt. Das soll jetzt geschehen.

Es sei

$$\mathscr{H}_m = \{h_m, h_{m+1}, \ldots\},$$

V der von $\mathscr{H}_m$ aufgespannte Raum. Wir betrachten nun ein $f \in V$ und notieren zunächst, daß $(f, h_\nu) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots m-1)$ ist. Für $N > m$ gilt

$$\begin{aligned} E_N^{\mathscr{H}}[f] &= \left\| f - \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu h_\nu \right\| \geq \left\| f - \sum_{\nu=m}^{N} \alpha_\nu h_\nu \right\| - \left\| \sum_{\nu=1}^{m-1} \alpha_\nu h_\nu \right\| \\ &\geq E_{N-m+1}^{\mathscr{H}_m}[f] - \left\| \sum_{\nu=1}^{m-1} (\mathrm{ba}_N^{\mathscr{H}}[f] - f, h_\nu)\, h_\nu \right\| \\ &\geq E_{N-m+1}^{\mathscr{H}_m}[f] - \text{const}\, E_N^{\mathscr{H}}[f], \end{aligned}$$

also

$$E_{N-m+1}^{\mathscr{H}_m}[f] \leq \text{const}\, E_N^{\mathscr{H}}[f]. \tag{11,8}$$

Somit folgt aus (11,7)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu^{\mathscr{H}_m}[f] < \infty$$

Jetzt können wir wieder *Lorentz* folgen ([2], Theorem 8 p. 61, zweiter Teil) und erhalten, wenn wir noch die Bezeichnung

$$\mathscr{H}_m^r = \{h_m^{(r)}, h_{m+1}^{(r)}, \ldots\}$$

verwenden

$$E_N^{\mathscr{H}_m^r}[f^{(r)}] \leq \text{const} \sum_{\nu=\left[\frac{N}{2}\right]}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu^{\mathscr{H}_m}[f].$$

Mit (11,8) folgt hieraus

Lemma 15:

$$E_N^{\mathscr{H}_m^r}[f^{(r)}] \leq \text{const} \sum_{\nu=\left[\frac{N}{2}\right]}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu^{\mathscr{H}}[f].$$

Jetzt ist es leicht, die verschiedenen klassischen Umkehrsätze zu übertragen. Man geht stets so vor, daß man zunächst durch Satz 14 die Existenz von $f^{(r)}$ für ein $r \geq 1$ feststellt (konvergiert (11,7) für kein $r \geq 1$, dann leistet ja schon Lemma 14 alles Wünschenswerte), dann $E_{N\,m}^{\mathscr{H}\,r}[f^{(r)}]$ mit Lemma 15 bestimmt und damit in Lemma 14 eingeht. Lemma 13 besagt ja gerade, daß $\mathscr{H}_m^r$ ein System ist, das die Voraussetzung von Lemma 14 erfüllt. Man erhält so zunächst nur Ergebnisse für $f \in V$, doch macht der Übergang zu beliebigen f keine Mühe. Es ist ja

$$\tilde{f} = f - \sum_{\nu=1}^{m-1} (f, h_\nu)\, h_\nu \in V$$

und natürlich gilt

$$E_N^{\mathscr{H}}[\tilde{f}] = E_N^{\mathscr{H}}[f] \quad N \geq m$$

und

$$\omega(\tilde{f}^{(r)};\ \delta) \geq \omega(f^{(r)}; \delta) - \| f \| \sum_{\nu=1}^{m-1} \omega(h_\nu^{(r)}; \delta)$$

$$\geq \omega(f^{(r)}; \delta) - \| f \| \operatorname{const} \delta\,.$$

Aus der Menge der so zu erhaltenden Sätze formulieren wir hier nur den einfachsten, die direkte Verallgemeinerung des klassischen *Bernstein*schen Umkehrsatzes:

Satz 15: Die Funktion l in (9,6) habe eine $(r-1)$-te beschränkte Ableitung (bzw. sei stetig, wenn $r = 1$ ist).

Es gelte

$$E_N^{\mathscr{H}}[f] = O(N^{-r-\alpha}) \quad 0 < \alpha \leq 1\,.$$

Dann genügt f der Bedingung $\mathscr{F}_r$. Ist $\alpha < 1$, dann ist $\omega(f^{(r)}; \delta) = O(\delta^\alpha)$. Ist $\alpha = 1$, dann ist $\omega(f^{(r)}; \delta) = O(\delta\, |\ln \delta| + \delta)$.

12. Anwendungen der Abschätzungen für die $E_N^{\mathscr{H}}[f]$ auf die Theorie der Reihenentwicklungen

Es sei wieder $\mathscr{H}$ das System der Eigenfunktionen einer selbstadjungierten Eigenwertaufgabe zweiter Ordnung. Zu jedem $f \in C\,[0,1]$ gehört eine Orthogonalreihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (f, h_\nu)\ h_\nu\,, \tag{12,1}$$

wir wollen ihre N-te Teilsumme mit $S_N[f]$ bezeichnen.

Zur Untersuchung derartiger Entwicklungen kann man Methoden verwenden, die auf *Lebesgue*, *Bernstein*, *Stečkin* u. a. zurückgehen; ihr gemeinsames Merkmal besteht darin, daß sie Kenntnisse über das asymptotische Verhalten der $E_N^{\mathscr{H}}[f]$ ausnützen. Diese Methoden sind ebenso einfach wie allgemein und dabei vielfach von erstaunlicher Wirksamkeit.

Die Untersuchung der Konvergenzgeschwindigkeit beruht auf der Beziehung

$$\| f - S_N[f] \| \leq \| f - \mathrm{ba}_N^{\mathscr{H}}[f] \| + \| S_N[\mathrm{ba}_N^{\mathscr{H}}[f] - f] \|$$
$$\leq E_N^{\mathscr{H}}[f] + \| S_N \| E_N^{\mathscr{H}}[f] .$$

Für die von uns betrachteten Fälle gilt stets (mit sup-Norm)

$$\| S_N \| = O(\ln n) .$$

Das beweist man unter Heranziehung der asymptotischen Ausdrücke für die h_ν ganz ähnlich wie im klassischen Spezialfall der *Fourier*schen Reihe. Wir haben also

$$\| f - S_N[f] \| \leq c \ln N \, E_N^{\mathscr{H}}[f] \quad N > 1 \tag{12,2}$$

wo c nur von $\mathscr{H}$ abhängt. In Verbindung mit Satz 12 ergeben sich so Abschätzungen, die schärfer und allgemeiner sind als die entsprechenden von *Jackson* ([3] p. 452). Natürlich erhält man als Spezialfall von (12,2) auch ein Konvergenzkriterium, nämlich: (12,1) konvergiert gleichmäßig, wenn

$$\lim_{N \to \infty} \ln N \, \omega(f; N^{-1}) = 0$$

ist. (*Dini-Lipschitz*-Kriterium bei *Fourier*schen Reihen.)

Statt Approximation durch die S_N kann man auch Approximation durch lineare Mittel aus den S_N untersuchen. Im Spezialfall der *Fourier*schen Reihe ist das eine vielbearbeitete Aufgabe der Approximationstheorie. Die Kenntnis der $E_N^{\mathscr{H}}[f]$ erlaubt es, viele Resultate auch in unserem allgemeineren Fall zu beweisen. Dazu hat man eine Methode zu benutzen, die in meiner Arbeit [20] auseinandergesetzt ist. Die dort notwendige Voraussetzung der $C-1$-Limitierbarkeit ist für unsere Entwicklungen erfüllt, wie man unschwer nachprüft (bei Typ IIIa verwendet man die Umformung aus § 6).

Auch Fragen der absoluten Konvergenz können leicht behandelt werden. Die einfachste hierhergehörende Abschätzungsmethode haben wir schon in § 3 benutzt.

Sie liefert sofort: (12,1) konvergiert absolut, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega(f; \nu^{-1})}{\sqrt{\nu}} < \infty$$

ist.

Beachtet man, daß das Analogon von Satz 7 im Raum $L^2[0,1]$ gültig ist (der Beweis von Satz 7 läßt sich fast wörtlich übertragen), dann kann man eine bei *Bary* ([21] Bd. 2 p. 160–161) beschriebene Methode anwenden und beweisen: Wenn f von beschränkter Schwankung ist und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega(f; \nu^{-1})}}{\nu} < \infty$$

ist, dann konvergiert (12,1) absolut.

Literatur

[1] *Stone, M. H.:* A generalized Weierstraß approximation theorem in "Studies in modern analysis", herausgegeben von R.C. Buck, Prentice Hall 1962, 30–87.

[2] *Lorentz, G. G.:* Approximation of functions; New York 1966.

[3] *Jackson, D.:* On the degree of convergence of Sturm-Liouville series; Transact. Amer. Math. Soc. **15** (1914), 439–466.

[4] *Milne, W. E.:* On the degree of convergence of Birkhoff's series; Transactions of the Amer. Math. Soc. **19** (1918), 143–156.

[5] *Natanson, G. I.:* Über die Theorie der Approximation von Funktionen durch Linearkombinationen von Sturm-Liouville-Eigenfunktionen (Russisch); Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) **114** (1957), 263–266.

[6] *Scarpellini, B.:* Approximation von Funktionen durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen Sturm-Liouvillescher Differentialgleichungen; Comment. Math. Helv. **36** (1961/1962), 265–305.

[7] *Walsh, J. L.:* A generalization of the Fourier cosine series; Transactions of the Amer. Math. Soc. **22** (1921), 230–239.

[8] *Frink, O.:* Series expansions in linear vector space; Amer. Journal of Math. **63** (1941), 87–100.

[9] *Riesz, F. — Sz.-Nagy, B.:* Vorlesungen über Funktionalanalysis; Berlin 1956.

[10] *Schäfke, F. W.:* Über einige unendliche lineare Gleichungssysteme; Math. Nachrichten **3** (1949/50), 40–61.

[11] *Kamke, E.:* Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen Bd. 1, 5. Aufl.; Leipzig 1956.

[12] *Neumark, M. A.:* Lineare Differentialoperatoren, 2. Aufl.; Berlin 1963.

[13] *Stone, M. H.:* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff; Transactions of the Amer. Math. Soc. **28** (1926), 695–761.

[14] *Timan, A. F.:* Theory of approximation of functions of a real variable; translated by J. Berry, Oxford 1963.

[15] *Neder, L.:* Abschätzungen für die Ableitungen einer reellen Funktion eines reellen Arguments; Math. Zeitschrift **31** (1930), 356–365.

[16] *Knopp, K.:* Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen; 4. Aufl., Berlin 1947.

[17] *Zaanen, A. C.:* On some orthogonal systems of functions; Compositio Mathematica 7 (1940), 253–282.

[18] *Kneser, A.:* Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen; Mathem. Annalen **58** (1904), 81–147.

[19] *Birkhoff, G. — Rota, G.-C.:* Ordinary differential equations; Boston 1959.

[20] *Braß, H.:* Approximation mittels Linearkombinationen von Projektionsoperatoren; Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft XVIII (1966), 50–69.

[21] *Bary, N. K.:* A Treatise on Trigonometric Series; Authorized translation by M. F. Mullins, Oxford 1964.